Terminale Spécialité Mathématiques
Tâche n° 17
Intersections

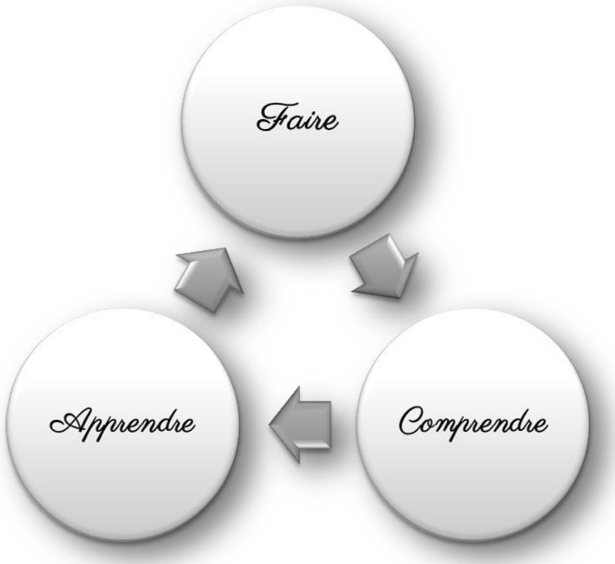

Table des matières

Tâche n° $\boxed{1}$ $\boxed{7}$
Intersections
Enoncé des exercices

Exercice 1. Deux droites

Dans l'espace rapporté à un repère orthonormal $(O,\vec{\imath},\vec{\jmath},\vec{k})$, on considère les droites $\mathcal{D}_1$ et $\mathcal{D}_2$ de représentations paramétriques respectives :

$$\begin{cases} x = -1 + 2t \\ y = 2 - 3t \\ z = 3 - t \end{cases} \quad t \in \mathbb{R} \quad \text{et} \quad \begin{cases} x = -2 - 3t' \\ y = 7 + t' \\ z = 3 + 2t' \end{cases} \quad t' \in \mathbb{R}$$

▶ 1. Les droites $\mathcal{D}_1$ et $\mathcal{D}_2$ sont-elles parallèles ?

▶ 2. Les droites $\mathcal{D}_1$ et $\mathcal{D}_2$ sont-elles sécantes ? Si oui, en quel point ?

Exercice 2. Deux droites

Dans l'espace rapporté à un repère orthonormal $(O,\vec{\imath},\vec{\jmath},\vec{k})$, on considère les droites $\mathcal{D}_1$ et $\mathcal{D}_2$ de représentations paramétriques respectives :

$$\begin{cases} x = 6t + 4 \\ y = -3 - 2t \\ z = 4t - 1 \end{cases} \quad t \in \mathbb{R} \quad \text{et} \quad \begin{cases} x = 7 - 3t' \\ y = -4 + t' \\ z = 2 - 2t' \end{cases} \quad t' \in \mathbb{R}$$

▶ 1. Les droites $\mathcal{D}_1$ et $\mathcal{D}_2$ sont-elles parallèles ?

▶ 2. Les droites $\mathcal{D}_1$ et $\mathcal{D}_2$ sont-elles confondues ?

Exercice 3. Deux droites

Dans l'espace rapporté à un repère orthonormal $(O,\vec{\imath},\vec{\jmath},\vec{k})$, on considère les droites $\mathcal{D}_1$ et $\mathcal{D}_2$ de représentations paramétriques respectives :

$$\begin{cases} x = 1 - \dfrac{1}{3}t \\ y = -2 - \dfrac{5}{4}t \\ z = 6 + \dfrac{3}{2}t \end{cases} \quad t \in \mathbb{R} \quad \text{et} \quad \begin{cases} x = 3 - \dfrac{4}{5}t' \\ y = \dfrac{11}{2} - 3t' \\ z = -3 + \dfrac{18}{5}t' \end{cases} \quad t' \in \mathbb{R}$$

▶ 1. Les droites $\mathcal{D}_1$ et $\mathcal{D}_2$ sont-elles parallèles ?

▶ 2. Les droites $\mathcal{D}_1$ et $\mathcal{D}_2$ sont-elles confondues ?

Exercice 4. Deux droites

Dans l'espace rapporté à un repère orthonormal $(O,\vec{\imath},\vec{\jmath},\vec{k})$, on considère les droites $\mathcal{D}_1$ et $\mathcal{D}_2$ de représentations paramétriques respectives :

$$\begin{cases} x = -4 - 3t \\ y = 12t + 3 \\ z = -5 - 6t \end{cases} \quad t \in \mathbb{R} \quad \text{et} \quad \begin{cases} x = t' \\ y = -13 - 2t' \\ z = 3 + t' \end{cases} \quad t' \in \mathbb{R}$$

▶ 1. Les droites $\mathcal{D}_1$ et $\mathcal{D}_2$ sont-elles parallèles ?

▶ 2. Les droites $\mathcal{D}_1$ et $\mathcal{D}_2$ sont-elles sécantes ? Si oui, en quel point ?

Exercice 5. Une droite et une sphère

Dans l'espace rapporté à un repère orthonormal $\left(O, \vec{\imath}, \vec{\jmath}, \vec{k}\right)$, on considère la sphère S de centre $J(-1; 2; 1)$ et de rayon 7.

Soit d la droite qui a pour représentation paramétrique :

$$\begin{cases} x = 5 + 3t \\ y = 14 + 6t \quad t \in \mathbb{R} \\ z = -3 - 2t \end{cases}$$

▶ 1. Déterminer l'équation de la sphère S.

▶ 2a. Déterminer les coordonnées des points A et B intersections entre la droite d et la sphère S.

b. Calculer la distance AB. Que peut-on en déduire ?

Exercice 6. Une droite et une sphère

Dans l'espace rapporté à un repère orthonormal $\left(O, \vec{\imath}, \vec{\jmath}, \vec{k}\right)$, on considère la sphère S de centre $K(1; -3; -4)$ et de rayon 3.

Soit d la droite qui a pour représentation paramétrique :

$$\begin{cases} x = 4 + 2t \\ y = -3 + t \quad t \in \mathbb{R} \\ z = 2 + 2t \end{cases}$$

▶ 1. Déterminer l'équation de la sphère S.

▶ 2. Déterminer l'intersection entre la droite d et la sphère S. Que peut-on en déduire ?

Tâche n° $\boxed{1}$ $\boxed{7}$
Intersections
Correction des exercices

Correction de l'exercice 1. Deux droites

Dans l'espace rapporté à un repère orthonormal $(O, \vec{\imath}, \vec{\jmath}, \vec{k})$, on considère les droites $\mathcal{D}_1$ et $\mathcal{D}_2$ de représentations paramétriques respectives :

$$\begin{cases} x = -1 + 2t \\ y = 2 - 3t \\ z = 3 - t \end{cases} \quad t \in \mathbb{R} \quad \text{et} \quad \begin{cases} x = -2 - 3t' \\ y = 7 + t' \\ z = 3 + 2t' \end{cases} \quad t' \in \mathbb{R}$$

▶ 1. Les droites $\mathcal{D}_1$ et $\mathcal{D}_2$ sont-elles parallèles ?

▶ 2. Les droites $\mathcal{D}_1$ et $\mathcal{D}_2$ sont-elles sécantes ? Si oui, en quel point ?

Exercice 1.	**1.**	$\overrightarrow{u_1}\begin{pmatrix} 2 \\ -3 \\ -1 \end{pmatrix}$ et $\overrightarrow{u_2}\begin{pmatrix} -3 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix}$ sont des vecteurs directeurs des droites $\mathcal{D}_1$ et $\mathcal{D}_2$ respectivement. $$\frac{-3}{2} \neq \frac{1}{-3} \neq \frac{2}{-1}$$ Les vecteurs ne sont pas colinéaires donc les droites ne sont pas parallèles.
	2.	Soit $t \in \mathbb{R}, t' \in \mathbb{R}$, $$\begin{cases} x = -1 + 2t = -2 - 3t' \\ y = 2 - 3t = 7 + t' \\ z = 3 - t = 3 + 2t' \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} -4t' = -1 - 3t' \\ 6t' = 5 + t' \\ \boldsymbol{t = -2t'} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} -t' = -1 \\ 5t' = 5 \\ \boldsymbol{t = -2t'} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} t' = 1 \\ t = -2 \end{cases}$$ $$\begin{cases} x = -1 + 2 \times (-2) \\ y = 2 - 3 \times (-2) \\ z = 3 - (-2) \end{cases} \quad t = -2 \quad \text{et} \quad \begin{cases} x = -2 - 3 \\ y = 7 + 1 \\ z = 3 + 2 \end{cases} \quad t' = 1$$ Les droites $\mathcal{D}_1$ et $\mathcal{D}_2$ sont donc sécantes au point $M(-5; 8; 5)$.

Correction de l'exercice 2. Deux droites

Dans l'espace rapporté à un repère orthonormal $(O, \vec{\imath}, \vec{\jmath}, \vec{k})$, on considère les droites $\mathcal{D}_1$ et $\mathcal{D}_2$ de représentations paramétriques respectives :

$$\begin{cases} x = 6t + 4 \\ y = -3 - 2t \\ z = 4t - 1 \end{cases} \quad t \in \mathbb{R} \quad \text{et} \quad \begin{cases} x = 7 - 3t' \\ y = -4 + t' \\ z = 2 - 2t' \end{cases} \quad t' \in \mathbb{R}$$

▶ 1. Les droites $\mathcal{D}_1$ et $\mathcal{D}_2$ sont-elles parallèles ?

▶ 2. Les droites $\mathcal{D}_1$ et $\mathcal{D}_2$ sont-elles confondues ?

Exercice 2.	**1.**	$\overrightarrow{u_1}\begin{pmatrix}6\\-2\\4\end{pmatrix}$ et $\overrightarrow{u_2}\begin{pmatrix}-3\\1\\-2\end{pmatrix}$ sont des vecteurs directeurs des droites $\mathcal{D}_1$ et $\mathcal{D}_2$ respectivement. $\overrightarrow{u_1}=-2\overrightarrow{u_2}$ Les vecteurs sont colinéaires donc les droites sont parallèles.
	2.	Soit $M(4;-3;-1)\in\mathcal{D}_1$, $\begin{cases}4=7-3t'\\-3=-4+t'\\-1=2-2t'\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}-3t'=-3\\t'=1\\-2t'=-3\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}t'=1\\t'=\dfrac{3}{2}\end{cases}$ donc $M(4;-3;-1)\notin\mathcal{D}_2$ Les droites $\mathcal{D}_1$ et $\mathcal{D}_2$ sont donc strictement parallèles.

Correction de l'exercice 3. Deux droites

Dans l'espace rapporté à un repère orthonormal $\left(O,\vec{\imath},\vec{\jmath},\vec{k}\right)$, on considère les droites $\mathcal{D}_1$ et $\mathcal{D}_2$ de représentations paramétriques respectives :

$$\begin{cases}x=1-\dfrac{1}{3}t\\y=-2-\dfrac{5}{4}t\\z=6+\dfrac{3}{2}t\end{cases}\quad t\in\mathbb{R}\quad\text{et}\quad\begin{cases}x=3-\dfrac{4}{5}t'\\y=\dfrac{11}{2}-3t'\\z=-3+\dfrac{18}{5}t'\end{cases}\quad t'\in\mathbb{R}$$

▶1. Les droites $\mathcal{D}_1$ et $\mathcal{D}_2$ sont-elles parallèles ?

▶2. Les droites $\mathcal{D}_1$ et $\mathcal{D}_2$ sont-elles confondues ?

Exercice 3.	**1.**	$\overrightarrow{u_1}\begin{pmatrix}-1/3\\-5/4\\3/2\end{pmatrix}$ et $\overrightarrow{u_2}\begin{pmatrix}-4/5\\-3\\18/5\end{pmatrix}$ sont des vecteurs directeurs des droites $\mathcal{D}_1$ et $\mathcal{D}_2$ respectivement. $\dfrac{-4/5}{-1/3}=\dfrac{12}{5}=\dfrac{-3}{-5/4}=\dfrac{18/5}{3/2}$ $\overrightarrow{u_2}=\dfrac{12}{5}\overrightarrow{u_1}$ Les vecteurs sont colinéaires donc les droites sont parallèles.
	2.	Soit $M(1;-2;6)\in\mathcal{D}_1$, $\begin{cases}1=3-\dfrac{4}{5}t'\\-2=\dfrac{11}{2}-3t'\\6=-3+\dfrac{18}{5}t'\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}-\dfrac{4}{5}t'=-2\\-3t'=\dfrac{-15}{2}\\\dfrac{18}{5}t'=9\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}t'=\dfrac{5}{2}\\t'=\dfrac{5}{2}\\t'=\dfrac{5}{2}\end{cases}$ donc $M(1;-2;6)\in\mathcal{D}_2$ Les droites $\mathcal{D}_1$ et $\mathcal{D}_2$ sont donc confondues.

Correction de l'exercice 4. Deux droites

Dans l'espace rapporté à un repère orthonormal $(O, \vec{\imath}, \vec{\jmath}, \vec{k})$, on considère les droites $\mathcal{D}_1$ et $\mathcal{D}_2$ de représentations paramétriques respectives :

$$\begin{cases} x = -4 - 3t \\ y = 12t + 3 \\ z = -5 - 6t \end{cases} t \in \mathbb{R} \quad \text{et} \quad \begin{cases} x = t' \\ y = -13 - 2t' \\ z = 3 + t' \end{cases} t' \in \mathbb{R}$$

▶ 1. Les droites $\mathcal{D}_1$ et $\mathcal{D}_2$ sont-elles parallèles ?

▶ 2. Les droites $\mathcal{D}_1$ et $\mathcal{D}_2$ sont-elles sécantes ? Si oui, en quel point ?

<table>
<tr>
<td rowspan="2">Exercice 4.</td>
<td>1.</td>
<td>$\overrightarrow{u_1}\begin{pmatrix} -3 \\ 12 \\ -6 \end{pmatrix}$ et $\overrightarrow{u_2}\begin{pmatrix} 1 \\ -2 \\ 1 \end{pmatrix}$ sont des vecteurs directeurs des droites $\mathcal{D}_1$ et $\mathcal{D}_2$ respectivement.

$$\frac{-3}{1} \neq \frac{12}{-2} = \frac{-6}{1}$$

Les vecteurs ne sont pas colinéaires donc les droites ne sont pas parallèles.</td>
</tr>
<tr>
<td>2.</td>
<td>Soit $t \in \mathbb{R}, t' \in \mathbb{R}$,

$$\begin{cases} x = -4 - 3t = t' \\ y = 12t + 3 = -13 - 2t' \\ z = -5 - 6t = 3 + t' \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} -4 - 3t = \boldsymbol{-8 - 6t} \\ 12t + 3 = -13 - 2(\boldsymbol{-8 - 6t}) \\ \boldsymbol{t' = -8 - 6t} \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} 3t = -4 \\ 12t + 3 = -13 + 16 + 12t \\ \boldsymbol{t' = -8 - 6t} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} t = -\frac{4}{3} \\ t' = -8 - 6 \times \frac{-4}{3} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} t = -\frac{4}{3} \\ t' = 0 \end{cases}$$

$$\begin{cases} x = -4 - 3 \times \left(-\frac{4}{3}\right) \\ y = 12 \times \left(-\frac{4}{3}\right) + 3 \\ z = -5 - 6 \times \left(-\frac{4}{3}\right) \end{cases} t = -\frac{4}{3} \quad \text{et} \quad \begin{cases} x = 0 \\ y = -13 \\ z = 3 \end{cases} t' = 0$$

Les droites $\mathcal{D}_1$ et $\mathcal{D}_2$ sont donc sécantes au point $M(0; -13; 3)$.</td>
</tr>
</table>

Correction de l'exercice 5. Une droite et une sphère

Dans l'espace rapporté à un repère orthonormal $(O, \vec{\imath}, \vec{\jmath}, \vec{k})$, on considère la sphère S de centre $J(-1; 2; 1)$ et de rayon 7.

Soit d la droite qui a pour représentation paramétrique :

$$\begin{cases} x = 5 + 3t \\ y = 14 + 6t \\ z = -3 - 2t \end{cases} t \in \mathbb{R}$$

▶ 1. Déterminer l'équation de la sphère S.

▶ 2a. Déterminer les coordonnées des points A et B intersections entre la droite d et la sphère S.

b. Calculer la distance AB. Que peut-on en déduire ?

<table>
<tr><td rowspan="3">Exercice 5.</td><td>1.</td><td>Soit $M(x;y;z) \in S$, $\overrightarrow{JM}\begin{pmatrix} x+1 \\ y-2 \\ z-1 \end{pmatrix}$
$$JM^2 = 49$$ $$\Leftrightarrow (x+1)^2 + (y-2)^2 + (z-1)^2 = 49$$</td></tr>
<tr><td>2a.</td><td>Soit $M(x;y;z) \in S \cap d$
$$\begin{cases} x = 5+3t \\ y = 14+6t \\ z = -3-2t \end{cases} \text{ et } (x+1)^2 + (y-2)^2 + (z-1)^2 = 49$$ $$(5+3t+1)^2 + (14+6t-2)^2 + (-3-2t-1)^2 = 49$$ $$\Leftrightarrow (6+3t)^2 + (12+6t)^2 + (-4-2t)^2 = 49$$ $$\Leftrightarrow 36 + 36t + 9t^2 + 144 + 144t + 36t^2 + 16 + 16t + 4t^2 = 49$$ $$\Leftrightarrow 49t^2 + 196t + 147 = 0$$ $$\Delta = 196^2 - 4 \times 49 \times 147 = 9604 > 0$$ $$t_1 = \frac{-196-98}{98} = -3 \quad \text{et} \quad t_2 = \frac{-196+98}{98} = -1$$ $$t = -3, \quad \begin{cases} x = 5 + 3 \times (-3) = -4 \\ y = 14 + 6 \times (-3) = -4 \\ z = -3 - 2 \times (-3) = 3 \end{cases} \text{ donc } A(-4;-4;3)$$ $$t = -1, \quad \begin{cases} x = 5 + 3 \times (-1) = 2 \\ y = 14 + 6 \times (-1) = 8 \\ z = -3 - 2 \times (-1) = -1 \end{cases} \text{ donc } B(2;8;-1)$$</td></tr>
<tr><td>2b.</td><td>$$\overrightarrow{AB}\begin{pmatrix} 6 \\ 12 \\ -4 \end{pmatrix} \text{ donc } AB = \sqrt{36+144+16} = \sqrt{196} = 14$$ J'en déduis que $[AB]$ est un diamètre et donc, que J est le milieu de $[AB]$.</td></tr>
</table>

Correction de l'exercice 6. Une droite et une sphère

Dans l'espace rapporté à un repère orthonormal $(O, \vec{\imath}, \vec{\jmath}, \vec{k})$, on considère la sphère S de centre $K(1;-3;-4)$ et de rayon 3.

Soit d la droite qui a pour représentation paramétrique :

$$\begin{cases} x = 4 + 2t \\ y = -3 + t \quad t \in \mathbb{R} \\ z = 2 + 2t \end{cases}$$

▶ 1. Déterminer l'équation de la sphère S.

▶ 2. Déterminer l'intersection entre la droite d et la sphère S. Que peut-on en déduire ?

<table>
<tr><td rowspan="2">Exercice 6.</td><td>1.</td><td>Soit $M(x;y;z) \in S$, $\quad \overrightarrow{KM}\begin{pmatrix} x-1 \\ y+3 \\ z+4 \end{pmatrix}$
$$KM^2 = 9$$
$$\Leftrightarrow (x-1)^2 + (y+3)^2 + (z+4)^2 = 9$$</td></tr>
<tr><td>2.</td><td>Soit $M(x;y;z) \in S \cap d$
$$\begin{cases} x = 4+2t \\ y = -3+t \\ z = 2+2t \end{cases} \text{ et } (x-1)^2 + (y+3)^2 + (z+4)^2 = 9$$
$$(4+2t-1)^2 + (-3+t+3)^2 + (2+2t+4)^2 = 9$$
$$\Leftrightarrow (3+2t)^2 + t^2 + (2t+6)^2 = 9$$
$$\Leftrightarrow 9 + 12t + 4t^2 + t^2 + 4t^2 + 24t + 36 = 9$$
$$\Leftrightarrow 9t^2 + 36t + 36 = 0$$
$$\Delta = 36^2 - 4 \times 9 \times 36 = 0$$
Il n'y a qu'une seule solution.
$$t = \frac{-36}{18} = -2$$
$$t = -2, \quad \begin{cases} x = 4 + 2 \times (-2) = 0 \\ y = -3 - 2 = -5 \\ z = 2 + 2 \times (-2) = -2 \end{cases} \quad \text{donc } M(0;-5;-2)$$
J'en déduis que la droite et la sphère sont tangentes en $M(0;-5;-2)$.</td></tr>
</table>