- Fiche n° 1 2
Loi binomiale et probabilités conditionnelles

Exercice n°1

Partie A :

Une angine peut être provoquée soit par une bactérie (angine bactérienne) soit par un virus (angine virale). On admet qu'un malade ne peut pas être à la fois porteur du virus et de la bactérie. L'angine est bactérienne dans 20% des cas. Pour déterminer si une angine est bactérienne, on dispose d'un test. Le test est conçu pour être positif lorsque l'angine est bactérienne mais il présente des risques d'erreur :

- si l'angine est bactérienne, le test est positif dans 96,8% des cas (sensibilité)
- si l'angine est virale, le test est négatif dans 94,7% des cas (spécificité).

On choisit au hasard un malade atteint d'angine. On note B l'événement : « l'angine est bactérienne » et T l'événement : « le test effectué sur le malade est positif ».

▶ 1. Montrer que la probabilité que le test soit positif est 0,236.

▶ 2. Un malade est choisi au hasard parmi ceux dont le test est positif. Quelle est la probabilité pour que son angine soit bactérienne ?

Partie B :

Un traitement par antibiotiques n'est nécessaire qu'en cas d'angine bactérienne. Pour les angines virales, les antibiotiques sont inutiles et inefficaces. Un groupe est constitué de 100 personnes. On note X la variable aléatoire qui donne le nombre de personnes testées positives dans le groupe.

▶ 1. Quelle est la loi de X ? On donnera ses paramètres.
▶ 2. Déterminer la valeur exacte de $P(X = 3)$, puis une valeur approchée.
▶ 3. Déterminer la probabilité qu'il y ait au moins deux personnes positives dans le groupe.
▶ 4. Déterminer l'espérance de X. Interpréter ce résultat.

Exercice n°2

Dans une entreprise, on s'intéresse à la probabilité qu'un salarié soit absent durant une période d'épidémie de grippe. Un salarié malade est absent. La première semaine de travail, le salarié n'est pas malade.

• Si la semaine n le salarié n'est pas malade, il tombe malade la semaine $n + 1$ avec une probabilité égale à 0,04.

• Si la semaine n le salarié est malade, il reste malade la semaine $n + 1$ avec une probabilité égale à 0,24.

On désigne, pour tout entier naturel n supérieur ou égal à 1, par E_n l'évènement « le salarié est absent pour cause de maladie la n^e semaine ». On note p_n la probabilité de l'évènement E_n.

▶ 1. a. Déterminer la valeur de p_3.

b. Sachant que le salarié a été absent pour cause de maladie la troisième semaine, déterminer la probabilité qu'il ait été aussi absent pour cause de maladie la deuxième semaine.

▶ 2. a. Montrer que, pour tout entier naturel n supérieur ou égal à 1, $p_{n+1} = 0,2\,p_n + 0,04$.

b. Démontrer que, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$,

$$p_n = 0,05 - 0,05 \times 0,2^{n-1}.$$

c. Déterminer alors la limite de la suite (p_n).

d. Démontrer que la suite (p_n) est croissante.

e. Pourquoi est-on sûr que la boucle s'arrête ?

```
def seuil(K):
    p=0
    n=1
    while p<0.05-10**(-K):
        n=n+1
        p=0.05-0.05*0.2**(n-1)
    return n
```

f. Que va renvoyer la fonction `seuil(6)` ?