Terminale Spécialité Mathématiques
Fiche n° 15
Problèmes dans l'espace

Table des matières

Exercice 1.

$ABCDEFGH$ est un cube de côté 1. Les points I, J et K sont les milieux respectifs des segments $[BF]$, $[BC]$ et $[CD]$.

L'espace est rapporté au repère $(A, \overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AD}, \overrightarrow{AE})$.

▶1. Donner les coordonnées des points A, G, I, Jet K dans ce repère.

▶2. On désigne par M un point du segment $[AG]$ et t le réel de l'intervalle [0 ; 1] tel que $\overrightarrow{AM} = t\,\overrightarrow{AG}$.

a. Démontrer que $MI^2 = 3t^2 - 3t + \frac{5}{4}$.

b. Démontrer que la distance MI est minimale pour le point $N\left(\frac{1}{2}; \frac{1}{2}; \frac{1}{2}\right)$.

c. Déterminer l'aire du triangle AGI.

▶3. a. Les droites (FD) et (AG) sont-elles sécantes ? Si oui, en quel point ?

b. Les droites (IN) et (HD) sont-elles sécantes ? Si oui, en quel point ?

▶4. Déterminer, s'ils existent, les coordonnées des points intersections entre la droite (IN) et les plans (Oxy), (Oxz) et (Oyz).

Exercice 2.

L'espace est muni d'un repère orthonormé $(O, \vec{\imath}, \vec{\jmath}, \vec{k})$.

On considère les trois points A, B et C de coordonnées respectives :

$$A(3; 1; 3), \quad B(2; -1; 1) \text{ et } C\left(\frac{13}{3}; \frac{11}{3}; \frac{10}{3}\right)$$

▶1. Vérifier que les points A, B et C définissent bien un plan.

▶2. On considère la sphère S de centre A et de rayon 3. Soit d la droite qui a pour représentation paramétrique :

$$\begin{cases} x = 1 + t \\ y = -3 + 2t \quad t \in \mathbb{R} \\ z = t \end{cases}$$

a. Montrer que le point B appartient à la droite d.

b. Montrer que le point B appartient à la sphère S.

c. Déterminer l'équation de la sphère S.

d. Montrer que la droite d coupe la sphère S en un deuxième point que l'on déterminera.

▶3. Déterminer, s'ils existent, les coordonnées des points intersections entre la droite d et les plans (Oxy), (Oxz) et (Oyz).

▶4. a. Déterminer l'intersection entre la sphère S et le plan (Oxy). Que peut-on en conclure ? idem avec le plan (Oyz).

b. Déterminer l'intersection entre la sphère S et le plan (Oxz).

Fiche n° 15
Problèmes dans l'espace
Correction des exercices

Correction de l'exercice 1.

$ABCDEFGH$ est un cube de côté 1. Les points I, J et K sont les milieux respectifs des segments $[BF]$, $[BC]$ et $[CD]$.

L'espace est rapporté au repère $\left(A, \overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AD}, \overrightarrow{AE}\right)$.

▶1. Donner les coordonnées des points A, G, I, J et K dans ce repère.

▶2. On désigne par M un point du segment $[AG]$ et t le réel de l'intervalle $[0 ; 1]$ tel que $\overrightarrow{AM} = t\,\overrightarrow{AG}$.

a. Démontrer que $MI^2 = 3t^2 - 3t + \frac{5}{4}$.

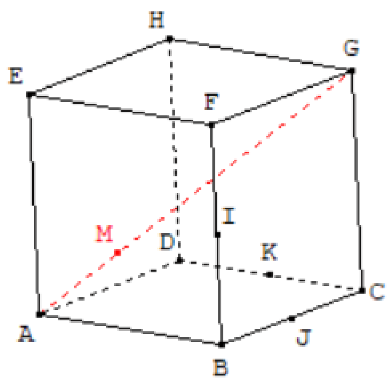
b. Démontrer que la distance MI est minimale pour le point $N\left(\frac{1}{2}; \frac{1}{2}; \frac{1}{2}\right)$.

c. Déterminer l'aire du triangle AGI.

▶3. a. Les droites (FD) et (AG) sont-elles sécantes ? Si oui, en quel point ?

b. Les droites (IN) et (HD) sont-elles sécantes ? Si oui, en quel point ?

▶4. Déterminer, s'ils existent, les coordonnées des points intersections entre la droite (IN) et les plans (Oxy), (Oxz) et (Oyz).

<table>
<tr><td rowspan="3">Exercice 1.</td><td>1.</td><td>$A(0; 0; 0)$ $G(1; 1; 1)$ $I\left(1; 0; \frac{1}{2}\right)$ $J\left(1; \frac{1}{2}; 0\right)$ $K\left(\frac{1}{2}; 1; 0\right)$</td></tr>
<tr><td>2a.</td><td>$\overrightarrow{AM} = t\,\overrightarrow{AG} = t\left(\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BC} + \overrightarrow{CG}\right)$
$\overrightarrow{AM} = t\overrightarrow{AB} + t\overrightarrow{AD} + t\overrightarrow{AE}$
donc $M(t; t; t)$

$\overrightarrow{MI}\begin{pmatrix} 1-t \\ -t \\ \frac{1}{2} - t \end{pmatrix}$
donc $MI^2 = (1-t)^2 + (-t)^2 + \left(\frac{1}{2} - t\right)^2$
$MI^2 = 1 - 2t + t^2 + t^2 + \frac{1}{4} - t + t^2$
$MI^2 = 3t^2 - 3t + \frac{5}{4}$</td></tr>
<tr><td>2b.</td><td>$\forall t \in [0 ; 1], f(t) = \sqrt{3t^2 - 3t + \frac{5}{4}}$
f est derivable sur $[0 ; 1]$</td></tr>
</table>

2b.

$$\forall t \in [0\,;1], f'(t) = \frac{6t-3}{2\sqrt{3t^2 - 3t + \frac{5}{4}}}$$

$$f'(t) > 0 \Leftrightarrow 6t - 3 > 0$$

$$\Leftrightarrow t > \frac{3}{6} \Leftrightarrow t > \frac{1}{2}$$

t	0		$\frac{1}{2}$		1
$f'(t)$		$-$	0	$+$	
$f(t)$	$\frac{5}{4}$	$\searrow$	$\frac{1}{2}$	$\nearrow$	$\frac{5}{4}$

La distance MI est minimale pour $t = \frac{1}{2}$ ce qui correspond au point $N\left(\frac{1}{2}\,;\frac{1}{2}\,;\frac{1}{2}\right)$.

2c.

$\overrightarrow{AG}\begin{pmatrix}1\\1\\1\end{pmatrix}$ donc $AG = \sqrt{1+1+1} = \sqrt{3}$

La hauteur du triangle AGI issue de I est IN.

$\overrightarrow{IN}\begin{pmatrix}-1/2\\1/2\\0\end{pmatrix}$ donc $IN = \sqrt{\frac{1}{4}+\frac{1}{4}} = \sqrt{\frac{1}{2}} = \frac{\sqrt{2}}{2}$

L'aire est donc $\frac{b\times h}{2} = \frac{\sqrt{3}\times\frac{\sqrt{2}}{2}}{2} = \sqrt{3}\times\frac{\sqrt{2}}{2}\times\frac{1}{2} = \frac{\sqrt{6}}{4}$

3a.

$F(1;0;1)$ $\quad D(0;1;0)$ $\quad \overrightarrow{FD}\begin{pmatrix}-1\\1\\-1\end{pmatrix}$ $\quad$ donc (FD) : $\begin{cases} x = -t \\ y = 1+t \\ z = -t \end{cases}$ $t \in \mathbb{R}$

$A(0;0;0)$ $\quad G(1;1;1)$ $\quad \overrightarrow{AG}\begin{pmatrix}1\\1\\1\end{pmatrix}$ $\quad$ donc (AG) : $\begin{cases} x = t' \\ y = t' \\ z = t' \end{cases}$ $t' \in \mathbb{R}$

Résolvons : $\begin{cases} t' = -t \\ t' = 1+t \\ t' = -t \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} t' = -t \\ -t = 1+t \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} t' = -t = \frac{1}{2} \\ t = \frac{-1}{2} \end{cases}$

Les droites (FD) et (AG) sont donc sécantes au point $N\left(\frac{1}{2};\frac{1}{2};\frac{1}{2}\right)$.

	3b.	$I\left(1;0;\frac{1}{2}\right)$ $N\left(\frac{1}{2};\frac{1}{2};\frac{1}{2}\right)$ $\overrightarrow{IN}\begin{pmatrix}-1/2\\1/2\\0\end{pmatrix}$ donc (IN) : $\begin{cases}x=1-\frac{1}{2}t\\y=\frac{1}{2}t\\z=\frac{1}{2}\end{cases}$ $t\in\mathbb{R}$ $H(0;1;1)$ $D(0;1;0)$ $\overrightarrow{HD}\begin{pmatrix}0\\0\\-1\end{pmatrix}$ donc (IN) : $\begin{cases}x=0\\y=1\\z=1-t'\end{cases}$ $t'\in\mathbb{R}$ Résolvons : $\begin{cases}0=1-\frac{1}{2}t\\1=\frac{1}{2}t\\1-t'=\frac{1}{2}\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}t'=1/2\\t=2\\t=2\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}t'=\frac{1}{2}\\t=2\end{cases}$ Les droites (IN) et (HD) sont donc sécantes au point $\left(0;1;\frac{1}{2}\right)$
	4.	$Z(x;y;z)\in(Oxy)$ donc $z=0$ donc $Z(x;y;0)\notin(IN)$ car $z=\frac{1}{2}$ pour tous les points de la droite (IN) donc $(IN)\cap(Oxy)=\emptyset$ $Z(x;y;z)\in(Oxz)$ donc $y=0$ or $Z(x;0;z)\in(IN)$ $\begin{cases}x=1-\frac{1}{2}t\\y=\frac{1}{2}t=0\Leftrightarrow t=0\\z=\frac{1}{2}\end{cases}\begin{cases}x=1\\y=0\\z=\frac{1}{2}\end{cases}$ donc $(IN)\cap(Oxz)=\left\{I\left(1;0;\frac{1}{2}\right)\right\}$ $Z(x;y;z)\in(Oyz)$ donc $x=0$ or $Z(0;y;z)\in(IN)$ $\begin{cases}x=1-\frac{1}{2}t=0\Leftrightarrow t=2\\y=\frac{1}{2}t\\z=\frac{1}{2}\end{cases}\begin{cases}x=0\\y=1\\z=\frac{1}{2}\end{cases}$ donc $(IN)\cap(Oyz)=\left\{\left(0;1;\frac{1}{2}\right)\right\}$

Correction de l'exercice 2.

L'espace est muni d'un repère orthonormé $(O,\vec{\imath},\vec{\jmath},\vec{k})$.

On considère les trois points A, B et C de coordonnées respectives :

$$A(3;1;3),\quad B(2;-1;1)\ \text{ et }\ C\left(\frac{13}{3};\frac{11}{3};\frac{10}{3}\right)$$

▶1. Vérifier que les points A, B et C définissent bien un plan.

▶2. On considère la sphère S de centre A et de rayon 3. Soit d la droite qui a pour représentation paramétrique :

$$\begin{cases} x = 1 + t \\ y = -3 + 2t \quad t \in \mathbb{R} \\ z = t \end{cases}$$

a. Montrer que le point B appartient à la droite d.

b. Montrer que le point B appartient à la sphère S.

c. Déterminer l'équation de la sphère S.

d. Montrer que la droite d coupe la sphère S en un deuxième point que l'on déterminera.

▶3. Déterminer, s'ils existent, les coordonnées des points intersections entre la droite d et les plans (Oxy), (Oxz) et (Oyz).

▶4. a. Déterminer l'intersection entre la sphère S et le plan (Oxy). Que peut-on en conclure ? idem avec le plan (Oyz).

b. Déterminer l'intersection entre la sphère S et le plan (Oxz).

Exercice 2.	**1.**	Les points A, B et C définissent bien un plan lorsqu'ils ne sont pas alignés. $\overrightarrow{AB}\begin{pmatrix}-1\\-2\\-2\end{pmatrix}\quad \overrightarrow{AC}\begin{pmatrix}4/3\\8/3\\1/3\end{pmatrix}$ $\frac{4/3}{-1} = \frac{8/3}{-2} \neq \frac{1/3}{-2}$ J'en déduis que les points A, B et C ne sont pas alignés, ils définissent donc bien un plan.
	2a.	$B(2;-1;1)\quad \begin{cases} 2 = 1 + t \\ -1 = -3 + 2t \\ 1 = t \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} t = 1 \\ t = 1 \\ t = 1 \end{cases}$ Le point B appartient donc à la droite d.
	2b.	$A(3;1;3),\quad B(2;-1;1)\quad \overrightarrow{AB}\begin{pmatrix}-1\\-2\\-2\end{pmatrix}$ Donc $AB = \sqrt{(-1)^2 + (-2)^2 + (-2)^2} = \sqrt{1+4+4} = \sqrt{9} = 3$ Le point B appartient donc à la sphère S.
	2c.	$M(x;y;z) \in S \Leftrightarrow AM = 3 \Leftrightarrow AM^2 = 9$ car $AM > 0$ $\Leftrightarrow (x-3)^2 + (y-1)^2 + (z-3)^2 = 9$

<table>
<tr>
<td rowspan="3"></td>
<td>2d.</td>
<td colspan="6">

$$\begin{cases} x = 1 + t \\ y = -3 + 2t \quad t \in \mathbb{R} \\ z = t \end{cases} \text{ et } (x-3)^2 + (y-1)^2 + (z-3)^2 = 9$$

$$(1 + t - 3)^2 + (-3 + 2t - 1)^2 + (t - 3)^2 = 9$$
$$\Leftrightarrow (t-2)^2 + (2t-4)^2 + (t-3)^2 = 9$$
$$\Leftrightarrow t^2 - 4t + 4 + 4t^2 - 16t + 16 + t^2 - 6t + 9 = 9$$
$$\Leftrightarrow 6t^2 - 26t + 20 = 0$$
$$\Delta = 26^2 - 4 \times 6 \times 20 = 196 = 14^2$$
$$t_1 = \frac{26 - 14}{12} = \frac{12}{12} = 1 \quad \text{et} \quad t_1 = \frac{26 + 14}{12} = \frac{40}{12} = \frac{10}{3}$$

La solution $t = 1$ permet de retrouver le point B.

La solution $t = \frac{10}{3}$ permet de déterminer le 2e point d'intersection

$$\begin{cases} x = 1 + \frac{10}{3} = \frac{13}{3} \\ y = -3 + \frac{20}{3} = \frac{11}{3} \\ z = \frac{10}{3} \end{cases} \text{ on trouve le point } C\left(\frac{13}{3}; \frac{11}{3}; \frac{10}{3}\right)$$

</td>
</tr>
<tr>
<td>3.</td>
<td colspan="2">

$M(x; y; z) \in (Oxy)$

donc $z = 0$

$$\begin{cases} x = 1 + t \\ y = -3 + 2t \\ z = 0 = t \end{cases}$$
$$\Leftrightarrow \begin{cases} x = 1 \\ y = -3 \\ z = 0 \end{cases}$$

$M(1; -3; 0)$

</td>
<td colspan="2">

$M(x; y; z) \in (Oxz)$

donc $y = 0$

$$\begin{cases} x = 1 + t \\ y = 0 = -3 + 2t \\ z = t \end{cases}$$
$$\Leftrightarrow \begin{cases} t = \frac{3}{2} \\ x = 1 + \frac{3}{2} = \frac{5}{2} \\ y = 0 \\ z = \frac{3}{2} \end{cases}$$

$M\left(\frac{5}{2}; 0; \frac{3}{2}\right)$

</td>
<td colspan="2">

$M(x; y; z) \in (Oyz)$

donc $x = 0$

$$\begin{cases} x = 0 = 1 + t \\ y = -3 + 2t \\ z = t \end{cases}$$
$$\Leftrightarrow \begin{cases} t = -1 \\ x = 0 \\ y = -5 \\ z = -1 \end{cases}$$

$M(0; -5; -1)$

</td>
</tr>
<tr>
<td>4a.</td>
<td colspan="3">

$M(x; y; z) \in (Oxy) \cup S$

donc $z = 0$ et

$$(x-3)^2 + (y-1)^2 + (0-3)^2 = 9$$
$$(x-3)^2 + (y-1)^2 + 9 = 9$$
$$(x-3)^2 + (y-1)^2 = 0$$
$$\Leftrightarrow \begin{cases} x = 3 \\ y = 1 \\ z = 0 \end{cases}$$

La sphère S et le plan (Oxy) sont donc tangents.

</td>
<td colspan="3">

$M(x; y; z) \in (Oyz) \cup S$

donc $x = 0$ et

$$(0-3)^2 + (y-1)^2 + (z-3)^2 = 9$$
$$9 + (y-1)^2 + (z-3)^2 = 9$$
$$(y-1)^2 + (z-3)^2 = 0$$
$$\Leftrightarrow \begin{cases} x = 0 \\ y = 1 \\ z = 3 \end{cases}$$

La sphère S et le plan (Oxy) sont donc tangents.

</td>
</tr>
</table>

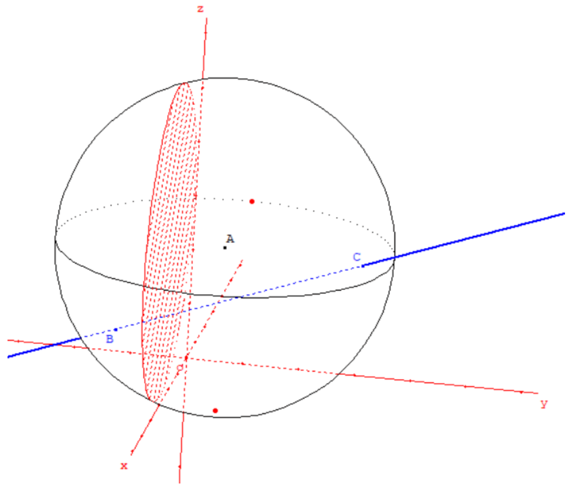
<table>
<tr>
<td></td>
<td>4b.</td>
<td>

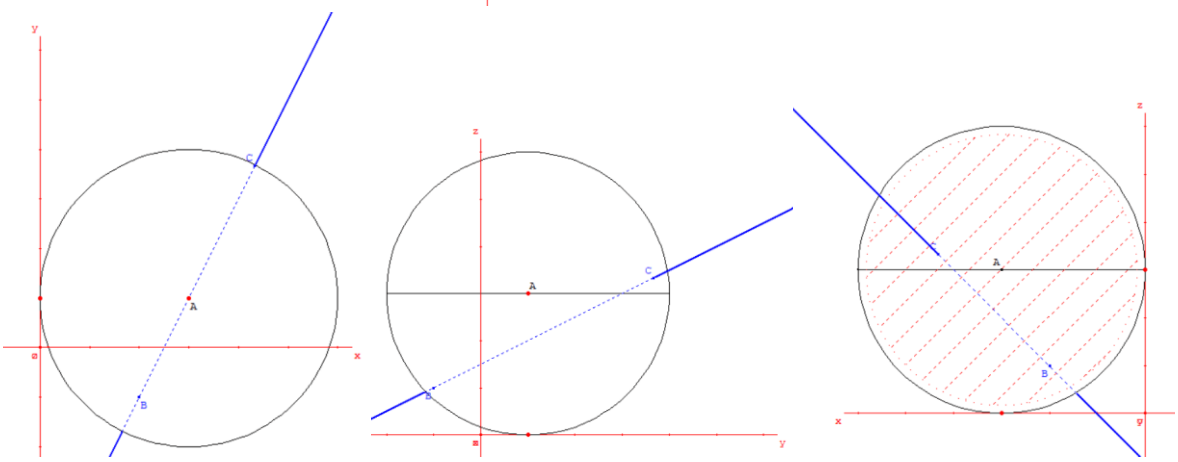
$$M(x;y;z) \in (Oxz) \cup S$$

donc $y = 0$ et

$$(x-3)^2 + (0-1)^2 + (z-3)^2 = 9$$
$$(x-3)^2 + 1 + (z-3)^2 = 9$$
$$(x-3)^2 + (z-3)^2 = 8$$

L'intersection de la sphère S et du plan (Oxy) est un cercle de centre $(3;0;3)$ et de rayon $\sqrt{8} = 2\sqrt{2}$ dans le plan (Oxy).





</td>
</tr>
</table>