Terminale Spécialité Mathématiques
Fiche n° 1 6
Une nouvelle fonction …

Table des matières

Lycée Polyvalent Albert EINSTEIN

Fiche n° 16
Une nouvelle fonction …
Enoncé des exercices

Exercice 1.

Ecrire en fonction de $\ln(3)$:

$$\ln(3e) \qquad \ln(81) \qquad \ln(\sqrt{27}) \qquad \ln\left(\frac{1}{9}\right) \qquad \ln\left(\frac{e}{\sqrt{3}}\right)$$

Exercice 2.

Ecrire en fonction de $\ln(5)$:

$$\ln(125e) \qquad \ln\left(\frac{1}{625}\right) \qquad \ln(\sqrt{3125}) \qquad \ln(25) \qquad \ln\left(\frac{e}{\sqrt{3125}}\right)$$

Exercice 3.

Ecrire en fonction de $\ln(x)$ où $x > 0$:

$$\ln(x^5) \qquad \ln\left(\frac{1}{x^3}\right) \qquad \ln\left(\sqrt{x^7}\right) \qquad \ln\left(\frac{1}{\sqrt{x^3}}\right) \qquad \ln(e \times x^{12})$$

Exercice 4.

Marc a placé 2500 euros sur un livret rémunéré à intérêts composés à 2%.
Déterminer au bout de combien d'années, son capital aura doublé.

Exercice 5.

Pour son assurance, le matériel informatique que Pierre a acheté perd 5% de sa valeur chaque année.
Déterminer au bout de combien d'années, sa valeur aura été divisée par deux.

Exercice 6.

Résoudre les équations :

$2^n = 4\,294\,967\,296 \qquad 3^n = 129\,140\,163$ et $e^x = 12045$

Exercice 7.

▶ 1. a) Résoudre l'équation $2\ln(x) = 2\ln 2 + \ln(3-x)$.

b) Résoudre l'équation $\ln(x^2) = 2\ln 2 + \ln(3-x)$

▶ 2. Résoudre l'inéquation $\ln(2-x) < 1$

Exercice 8.

▶ 1. a) Résoudre l'équation $\ln(x+5) = \ln x + \ln(2x-8)$.

b) Résoudre l'équation $\ln(x+5) = \ln[x(2x-8)]$

▶ 2. Résoudre l'inéquation $\ln(x+4) \geq 0$

Fiche n° 16
Une nouvelle fonction …
Correction des exercices

Correction de l'exercice 1.

Ecrire en fonction de $\ln(3)$:

$\ln(3e)$ $\quad\ln(81)$ $\quad\ln(\sqrt{27})$ $\quad\ln\left(\frac{1}{9}\right)$ $\quad\ln\left(\frac{e}{\sqrt{3}}\right)$

Exercice 1.	$\ln(3e) = \ln(3) + \ln(e)$ car $\forall a \in]0;+\infty[, \forall b \in]0;+\infty[\ \ln(a \times b) = \ln(a) + \ln(b)$ $\ln(3e) = \ln(3) + 1$ car $\ln(e) = 1$
	$\ln(81) = \ln(3^4)$ $\ln(81) = 4\ln(3)$ car $\forall a \in]0;+\infty[, \forall n \in \mathbb{N},\ \ln(a^n) = n\ln(a)$
	$\ln(\sqrt{27}) = \frac{1}{2}\ln(27)$ car $\forall a \in]0;+\infty[,\ \ln(\sqrt{a}) = \frac{1}{2}\ln(a)$ $\ln(\sqrt{27}) = \frac{1}{2}\ln(3^3)$ $\ln(\sqrt{27}) = \frac{3}{2}\ln(3)$ car $\forall a \in]0;+\infty[, \forall n \in \mathbb{N},\ \ln(a^n) = n\ln(a)$
	$\ln\left(\frac{1}{9}\right) = -\ln(9)$ car $\forall b \in]0;+\infty[,\ \ln\left(\frac{1}{b}\right) = -\ln(b)$ $\ln\left(\frac{1}{9}\right) = -\ln(3^2)$ $\ln\left(\frac{1}{9}\right) = -2\ln(3)$ car $\forall a \in]0;+\infty[, \forall n \in \mathbb{N},\ \ln(a^n) = n\ln(a)$
	$\ln\left(\frac{e}{\sqrt{3}}\right) = \ln(e) - \ln(\sqrt{3})$ car $\forall a \in]0;+\infty[, \forall b \in]0;+\infty[\ \ln\left(\frac{a}{b}\right) = \ln(a) - \ln(b)$ $\ln\left(\frac{e}{\sqrt{3}}\right) = 1 - \frac{1}{2}\ln(3)$ car $\forall a \in]0;+\infty[,\ \ln(\sqrt{a}) = \frac{1}{2}\ln(a)$

Correction de l'exercice 2.

Ecrire en fonction de $\ln(5)$:

$\ln(125e)$ $\quad\ln\left(\frac{1}{625}\right)$ $\quad\ln(\sqrt{3125})$ $\quad\ln(25)$ $\quad\ln\left(\frac{e}{\sqrt{3125}}\right)$

Correction de l'exercice 3.

Ecrire en fonction de $\ln(x)$ où $x > 0$:

$\ln(x^5)$ $\ln\left(\frac{1}{x^3}\right)$ $\ln\left(\sqrt{x^7}\right)$ $\ln\left(\frac{1}{\sqrt{x^3}}\right)$ $\ln(e \times x^{12})$

Correction de l'exercice 4.

Marc a placé 2500 euros sur un livret rémunéré à intérêts composés à 2%.
Déterminer au bout de combien d'années, son capital aura doublé.

Exercice 4.	
	On peut modéliser le capital acquis par Marc par une suite (u_n). On a $u_0 = 2500$. +2% revient à multiplier par 1,02 donc, d'après l'énoncé, $\forall n \in \mathbb{N},\ u_{n+1} = u_n \times 1{,}02$ La suite (u_n) est donc géométrique de raison 1,02 et de 1er terme $u_0 = 2500$. J'en déduis que, $\forall n \in \mathbb{N},\ u_n = \boldsymbol{u_0 \times q^n} = 2500 \times 1{,}02^n$ Résolvons : $u_n > 5000$ $2500 \times 1{,}02^n > 5000$ $\Leftrightarrow 1{,}02^n > \frac{5000}{2500}$ $\Leftrightarrow 1{,}02^n > 2$ $\Leftrightarrow \ln(1{,}02^n) > \ln(2)$ $\Leftrightarrow n \times \ln(1{,}02) > \ln(2)$ $\Leftrightarrow n > \frac{\ln(2)}{\ln(1{,}02)} > 35{,}002$ Le capital aura doublé au bout de 36 années. Le logarithme permet de faire passer l'inconnue de l'équation, ici n, d'une puissance à une simple multiplication.

Correction de l'exercice 5.

Pour son assurance, le matériel informatique que Pierre a acheté perd 5% de sa valeur chaque année.
Déterminer au bout de combien d'années, sa valeur aura été divisée par deux.

Exercice 5.	On peut modéliser la valeur du matériel informatique par une suite (u_n). -2% revient à multiplier par 0,95 donc, d'après l'énoncé, $\forall n \in \mathbb{N},\ u_{n+1} = u_n \times 0{,}95$ La suite (u_n) est donc géométrique de raison 0,95 et de 1er terme u_0. J'en déduis que, $\forall n \in \mathbb{N},\ u_n = \boldsymbol{u_0 \times q^n} = u_0 \times 0{,}95^n$ Résolvons : $u_n < \frac{u_0}{2}$ $u_0 \times 0{,}95^n < \dfrac{u_0}{2}$ $\Leftrightarrow 0{,}95^n < \dfrac{u_0}{2u_0}$ $\Leftrightarrow 0{,}95^n < \dfrac{1}{2}$ $\Leftrightarrow \ln(0{,}95^n) < \ln\left(\dfrac{1}{2}\right)$ $\Leftrightarrow n \times \ln(0{,}95) < -\ln(2)$ $\Leftrightarrow n > \dfrac{-\ln(2)}{\ln(0{,}95)} > 13{,}5$ La valeur aura été divisée par deux au bout de 14 années.

Correction de l'exercice 6.

Résoudre les équations :

$2^n = 4\,294\,967\,296$ $\qquad$ $3^n = 129\,140\,163$ $\qquad$ et $\qquad$ $e^x = 12045$

Correction de l'exercice 7.

▶ 1. a) Résoudre l'équation $2\ln(x) = 2\ln 2 + \ln(3 - x)$.

b) Résoudre l'équation $\ln(x^2) = 2\ln 2 + \ln(3 - x)$

▶ 2. Résoudre l'inéquation $\ln(2 - x) < 1$

Correction de l'exercice 8.

▶ 1. a) Résoudre l'équation $\ln(x + 5) = \ln x + \ln(2x - 8)$.

b) Résoudre l'équation $\ln(x + 5) = \ln[x(2x - 8)]$

▶ 2. Résoudre l'inéquation $\ln(x + 4) \geq 0$