Problèmes qui relèvent du logarithme

Exercice n°1

On sait que la relation entre le pH et la concentration en ions H_3O^+, exprimée en mol/L s'écrit $[H_3O^+] = 10^{-pH}$.

▶ 1a) Quelle est la concentration en ions H_3O^+ de l'eau pure ?

b) Le blanc d'œuf possède une concentration en ions H_3O^+ égale à $1{,}6 \times 10^{-8}\ mol/L$. Quel est son pH ? Est-ce neutre, basique ou acide ?

▶ 2a) Démontrer que $pH = \frac{-\ln([H_3O^+])}{\ln(10)}$.

b) Compléter : « Lorsque le pH augmente de 1, la concentration en ions H_3O^+ … ».

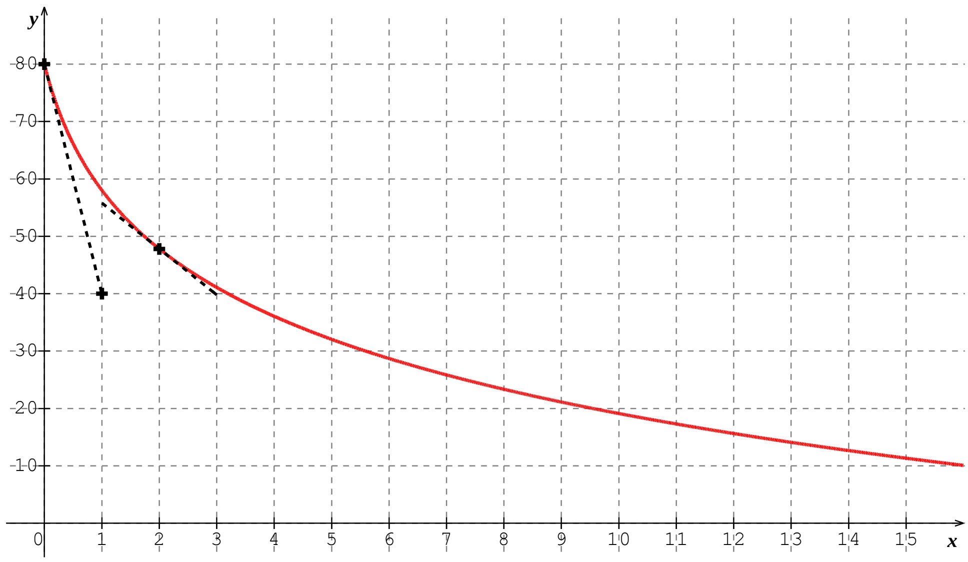
▶ 3. $\forall x \in \,]0; +\infty[$, posons $f(x) = \frac{-\ln(x)}{\ln(10)}$.

a) Déterminer les limites de la fonction f aux bornes de son ensemble de définition.

b) Déterminer le tableau de variations de la fonction f.

Exercice n°2

On souhaite étudier le bruit émis par une éolienne en dB (décibels) en fonction de la distance x en centaines de mètres. Pour x entre 0 et 30, $f(x)$ représente le niveau sonore émis par l'éolienne, entendu à x centaines de mètres.



On suppose que, $\forall x \in [0; 30]$, $f(x) = a + b\ln(cx + 1)$, où a, b et c sont des constantes réelles.

▶ 1. En utilisant le graphique et sachant que le coefficient directeur de la tangente à la courbe en 2 vaut -8, démontrer que,

$$\forall x \in [0; 30], f(x) = 80 - 20\ln(2x + 1).$$

▶ 2. Déterminer à partir de quelle distance le bruit du moteur est de 20 dB.

▶ 3. Déterminer le tableau de variations de la fonction f.

Exercice n°3

Charles Francis Richter, sismologue américain (1900-1985), créa en 1935 une échelle afin de classer les séismes. Ceux-ci y sont classés selon leur magnitude M. On considère que la magnitude M d'un séisme en fonction de l'énergie libérée E (en joule, J) s'écrit $M = a\ln(E) + b$.

- Le séisme de 1960 à Valdivia au Chili a eu lieu le 22 mai 1960 à 19h11. Sa magnitude, la plus élevée jamais enregistrée, a été estimée à 9,5 pour une énergie libérée de $5{,}62 \times 10^{18}\ J$.
- Parmi les séismes de 2023 en Turquie et Syrie, le premier, et le plus important, a eu lieu le 6 février 2023 à 1h17. Il a atteint une magnitude de 7,8 pour une énergie libérée de $1{,}58 \times 10^{16}\ J$.

▶1a. Démontrer que $M = 0{,}2894\ \ln(E) - 3$ en arrondissant à 10^{-4}.

b. En déduire l'expression de E en fonction de M.

▶2a. Déterminer l'énergie libérée par le séisme du 11/11/19 au Teil de magnitude 5,4.

b. L'explosion de la bombe atomique Little Boy, lâchée sur Hiroshima le 6 août 1945 à 8h15, a dégagé une énergie de $6 \times 10^{13}\ J$. A quelle magnitude cela correspondrait-il ?

▶3. Compléter la phrase suivante : « Entre un séisme de magnitude 4 et un séisme de magnitude 8, l'énergie dégagée est multipliée par … ».

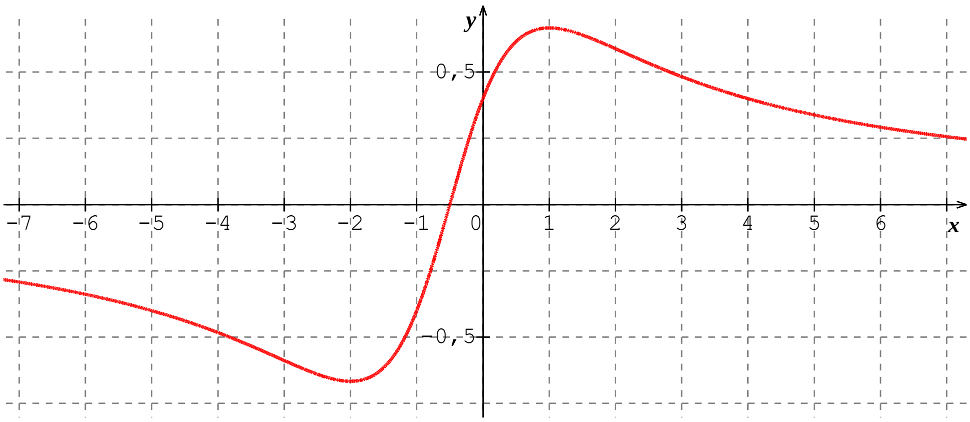
▶4. $\forall x \in]0; +\infty[$, posons $f(x) = 0{,}2894\ \ln(x) - 3$.

a) Déterminer les limites de la fonction f aux bornes de son ensemble de définition.

b) Déterminer le tableau de variations de la fonction f.

Exercice n°4

Partie A : f désigne une fonction dérivable sur $\mathbb{R}$. On donne ci-dessous la courbe représentative de la fonction dérivée f'. *Avec la précision permise par le graphique, répondre aux questions suivantes :*



▶1. Déterminer le coefficient directeur de la tangente à la courbe de la fonction f en 0.

▶2. Déterminer un intervalle sur lequel f est convexe.

Partie B : La fonction f est définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = \ln\left(x^2 + x + \frac{5}{2}\right)$.

▶1. Déterminer les limites de la fonction f aux bornes de son ensemble de définition.

▶2. Déterminer, en justifiant, le tableau de variations de la fonction f.

▶3a. Démontrer que l'équation $f(x) = 2$ admet une unique solution α dans l'intervalle $\left[-\frac{1}{2}; +\infty\right[$.

b. Donner une valeur approchée de α à 10^{-2} près.

▶4a. f' est dérivable sur R. Démontrer que, $\forall x \in \mathbb{R}, f''(x) = \dfrac{-2(x^2 + x - 2)}{\left(x^2 + x + \frac{5}{2}\right)^2}$.

b. En déduire le nombre de points d'inflexion de la courbe représentative de f.