Fiche n° $\boxed{2}$ $\boxed{1}$
Comment résout-on certaines équations différentielles ?

Exercice n°1

▶1. Résoudre l'équation différentielle (E_0) : $y' + 2y = 0$.
▶2. Soit l'équation différentielle (E) : $y'(x) + 2y(x) = x$.
a) Déterminer a et b pour que la fonction affine $g(x) = ax + b$ définie sur $\mathbb{R}$ soit solution particulière de l'équation (E).
b) En déduire toutes les solutions de (E).
c) Déterminer la solution de (E) telle que $y(0) = 1$.

Exercice n°2

Soit l'équation différentielle (E) : $y' - y = x^2 - x - 1$ dans laquelle y est une fonction de la variable x, dérivable sur $\mathbb{R}$.
▶1. Résoudre dans $\mathbb{R}$, l'équation différentielle homogène associée à (E).
▶2 a) Démontrer que la fonction $g(x) = -x^2 - x$ définie sur $\mathbb{R}$ est solution de (E).
b) En déduire les solutions de (E).
▶3. Déterminer la solution f de (E) qui vérifie la condition initiale $f(0) = 1$.

Exercice n°3

Soit l'équation différentielle (E) : $y' + y = \frac{1}{1+e^x}$
▶1. Résoudre dans $\mathbb{R}$, l'équation différentielle homogène associée à (E).
▶2. Déterminer une fonction k, définie et dérivable sur $\mathbb{R}$, telle que, pour tout x de $\mathbb{R}$, la fonction $h(x) = k(x)e^{-x}$ soit solution particulière de l'équation (E).
▶3. En déduire l'ensemble des solutions de l'équation différentielle (E).
▶4. Déterminer la solution f de (E) qui vérifie la condition initiale $f(0) = 1 + \ln(2)$.

Exercice n°4

Dans tout l'exercice, λ désigne un nombre réel de l'intervalle $]0; 1]$. On étudie l'équation différentielle (E_λ) : $y' = y^2 + \lambda y$.

On suppose qu'il existe une fonction u de (E_λ) strictement positive sur $\left]-\infty; \frac{1}{2}\right[$ et on pose sur $\left]-\infty; \frac{1}{2}\right[$: $z = \frac{1}{u}$.

▶1. Démontrer que z est solution de l'équation (E) : $z' = -\lambda z - 1$ si et seulement si u est solution de l'équation (E_λ).
▶2. Résoudre l'équation différentielle (E) : $z' + \lambda z = -1$.

▶3. En déduire la solution de l'équation différentielle (E_λ) qui vaut 1 en 0.
▶4 a. Etudier les variations de la fonction $f(x) = \ln(x + 1) - \frac{x}{x+1}$ sur $]0; 1]$. En déduire que $\frac{\ln(\lambda+1)}{\lambda} > \frac{1}{2}$.
b. En déduire que la solution de (E_λ) qui vaut 1 en 0 est strictement positive sur $\left]-\infty; \frac{1}{2}\right[$.