Fiche n° 2 4
Comment utilise-t-on une inégalité de concentration ?

Dans un examen, une épreuve notée sur dix points est constituée de deux exercices : le premier est noté sur deux points, le deuxième sur huit points.

Partie I

Le premier exercice est constitué de deux questions Q1 et Q2. Chaque question est notée sur un point. Une réponse correcte rapporte un point ; une réponse incorrecte, incomplète ou une absence de réponse rapporte zéro point. On considère qu'un candidat pris au hasard a une probabilité 0,8 de répondre correctement à la question Q1. Si le candidat répond correctement à Q1, il a une probabilité 0,6 de répondre correctement à Q2 ; s'il ne répond pas correctement à Q1, il a une probabilité 0,1 de répondre correctement à Q2. On prend un candidat au hasard et on note A l'évènement : « le candidat répond correctement à la question Q1 » et B l'évènement : « le candidat répond correctement à la question Q2 ».

▶ 1. Représenter la situation par un arbre.

▶ 2. Calculer la probabilité que le candidat réponde correctement à la question Q2.

On note X_1 (resp X_2) la variable aléatoire qui, à un candidat, associe sa note à la question Q1 (resp Q2) et X la variable aléatoire qui associe sa note à cet exercice.

▶ 3. Déterminer les espérances de X_1 et X_2. En déduire l'espérance de X. Interpréter.

▶ 4a. Déterminer $P(X = 0)$ et $P(X = 2)$. En déduire $P(X = 1)$.

b. Calculer la variance de X. A-t-on $V(X) = V(X_1) + V(X_2)$? Est-ce surprenant ?

Partie II

Le deuxième exercice est constitué de huit questions indépendantes. Chaque question est notée sur un point. Une réponse correcte rapporte un point ; une réponse incorrecte et une absence de réponse rapporte zéro point. Les huit questions sont de même difficulté : pour chacune des questions, un candidat a une probabilité 0,75 de répondre correctement, indépendamment des autres questions. On note Y la variable aléatoire qui, à un candidat, associe sa note au deuxième exercice, c'est-à-dire le nombre de bonnes réponses.

▶ 1. Justifier que Y suit une loi binomiale dont on précisera les paramètres.

▶ 2. Donner la valeur exacte de $P(Y = 8)$.

▶ 3. Donner l'espérance et la variance de Y.

Partie III

On suppose que les deux variables aléatoires X et Y sont indépendantes. On note la variable aléatoire qui, à un candidat, associe sa note totale à l'examen : $Z = X + Y$.

▶ 1. Calculer l'espérance et la variance de Z.

▶ 2. Soit n un nombre entier strictement positif. Pour i entier variant de 1 à n, on note Z_i la variable aléatoire qui, à un échantillon de n élèves, associe la note de l'élève numéro i à l'examen. On admet que les variables aléatoires $Z_1, Z_2, \dots, Z_n$ sont identiques à Z et indépendantes. On note M_n la variable aléatoire qui, à un échantillon de n élèves, associe la moyenne de leurs n notes.

a. Quelle est l'espérance de M_n ?

b. Quelles sont les valeurs de n telles que l'écart type de M_n soit inférieur ou égal à 0,5 ?

c. Pour les valeurs trouvées en b., montrer que la probabilité que $6{,}3 \leq M_n \leq 8{,}3$ est supérieure ou égale à 0,75.