

Exercice 1 :

Soit une variable aléatoire X d'espérance μ et d'écart-type σ .

Dans chacun des cas, majorer la probabilité donnée :

- ▶ 1. $P(|X - \mu| \geq \sigma)$ et donc $P(|X - \mu| < \sigma)$
- ▶ 2. $P(|X - \mu| \geq 2\sigma)$ et donc $P(|X - \mu| < 2\sigma)$
- ▶ 3. $P(|X - \mu| \geq 3\sigma)$ et donc $P(|X - \mu| < 3\sigma)$
- ▶ 4. $\forall k \geq 0, P(|X - \mu| \geq k\sigma)$ et donc $P(|X - \mu| < k\sigma)$

Exercice 2 :

Soit X une variable aléatoire centrée et réduite. On considère un échantillon X_1, X_2, \dots, X_n de n variables aléatoires indépendantes suivant la loi de X et on note

$$M_n = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n X_i$$

- ▶ 1. Calculer $E(M_n)$ et $V(M_n)$.
- ▶ 2. Donner une minoration de la probabilité $P\left(-\frac{2}{\sqrt{n}} < M_n < \frac{2}{\sqrt{n}}\right)$.
- ▶ 3. Simulation en python

a) Que permet de calculer la fonction python ci-dessous ?

```
def moyenne(L) :
    somme=0
    for i in L:
        somme=somme+i
    return somme/len(L)
```

b) Modifier cette fonction pour qu'elle calcule l'écart-type des valeurs de la liste L.

c) Ecrire un programme qui crée une liste contenant n valeurs aléatoires suivant une loi centrée réduite.

Exercice 3 :

On lance une pièce équilibrée n fois de suite avec n un entier strictement positif. La variable aléatoire M_n donne la proportion de Pile obtenus au cours des n lancers.

- ▶ 1. Déterminer l'espérance et la variance de M_n .
- ▶ 2. Démontrer que $P(|M_n - 0,5| \geq 0,1) \leq \frac{25}{n}$
- ▶ 3. Déterminer une valeur de n telle que $P(|M_n - 0,5| \geq 0,1) \leq 0,01$.

Exercice 4 :

▶ 1. Combien de lancers de dés faut-il effectuer pour que la fréquence d'apparitions du 6 soit dans l'intervalle $\left] \frac{7}{60}; \frac{13}{60} \right[$ avec une probabilité d'au moins 0,95 ?

▶ 2. Ecrire un script Python permettant de simuler cette expérience.

▶ 3. Afin de tester l'équilibre d'un dé, vous testez le nombre de lancers de la question précédente et trouvez une fréquence d'apparition du 6 d'environ 0,11.

Que peut-on en penser ?