- Fiche n° $\boxed{4}$
Comment détermine-t-on la limite d'une suite par comparaison ?

Exercice n°1

La suite (v_n) est définie pour tout $n \in \mathbb{N}^*$ par $v_n = 2 - \dfrac{\sin(n)}{n^2}$

$a)$ Démontrer que, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, $2 - \dfrac{1}{n^2} \leq v_n \leq 2 + \dfrac{1}{n^2}$

$b)$ Que peut-on en déduire à propos de la suite (v_n) ?

Exercice n°2

Déterminer, en justifiant, la limite de la suite (u_n) dans les cas ci-dessous :

▶1. $\forall n \in \mathbb{N}^*,\ u_n = \dfrac{(-1)^n}{n}$

▶2. $\forall n \in \mathbb{N},\ u_n = 2n + \cos n$

Exercice n°3

Déterminer, en justifiant, la limite de la suite (u_n) dans les cas ci-dessous :

▶1. Pour tout $n \in \mathbb{N}$, $u_n = \dfrac{(-1)^n + \sin n}{n+2}$

▶2. Pour tout $n \in \mathbb{N}$, $u_n = 5n + \sqrt{(-1)^n + 1}$

Exercice n°4

La suite (u_n) est définie par $u_0 = 2$ et, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $u_{n+1} = \dfrac{1}{2}u_n^2 + \dfrac{3}{2}$.

▶1. Démontrer que, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $u_{n+1} - u_n \geq 1$.

▶2. Pour tout $n \in \mathbb{N}$, en remarquant que

$$u_n - 2 = (u_n - u_{n-1}) + (u_{n-1} - u_{n-2}) + \cdots + (u_2 - u_1) + (u_1 - u_0),$$

démontrer que $u_n - 2 \geq n$.

▶3. Que peut-on en déduire à propos de la suite (u_n) ?

Exercice n°5 Vrai/Faux

Pour chacune des affirmations suivantes, indiquer si elle est vraie ou fausse en justifiant la réponse.

▶1. Soit $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ et $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ deux suites telles que, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $u_n \leq v_n$ et $\lim\limits_{n\to+\infty} v_n \neq +\infty$. **Affirmation 1 :** $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n \neq +\infty$.

▶2. **Affirmation 2 :** Si (u_n) est décroissante alors $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n = -\infty$

▶3. **Affirmation 3 :** Réciproque de l'affirmation 2.

▶4. **Affirmation 4 :** Si $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n = -\infty$ et $\lim\limits_{n\to+\infty} v_n = +\infty$ alors $\lim\limits_{n\to+\infty} \dfrac{u_n}{v_n} = -1$