- Fiche n° 5
Comment démontre-t-on par récurrence ?

Exercice n°1

La suite (u_n) est définie par $u_0 = 6$ et $u_{n+1} = \frac{1}{2}\,u_n + 2$ pour tout $n \in \mathbb{N}$. Démontrer par récurrence, que $u_n = \frac{1}{2^{n-1}} + 4$ pour tout $n \in \mathbb{N}$. En déduire la limite de la suite (u_n).

Exercice n°2

La suite (v_n) est définie par $v_0 = 1$ et $v_{n+1} = 3 + \frac{1}{2}v_n$ pour tout $n \in \mathbb{N}$. Démontrer par récurrence, que pour tout $n \in \mathbb{N}$: $v_n = 6 - \frac{5}{2^n}$. En déduire la limite de la suite (v_n).

Exercice n°3

La suite (u_n) est définie par $u_0 = 0$ et $u_{n+1} = 5 - \dfrac{1}{2}u_n$ pour tout $n \in \mathbb{N}$.

a) Démontrer que $u_n = \dfrac{10}{3} - \dfrac{10}{3} \times \left(-\dfrac{1}{2}\right)^n$ pour tout $n \in \mathbb{N}$.

b) En déduire la limite de la suite (u_n).

Exercice n°4

La suite (u_n) est définie par $u_0 = \dfrac{1}{2}$ et, $\forall n \in \mathbb{N}, u_{n+1} = \dfrac{u_n}{1+u_n}$.

a) Conjecturer une expression de u_n en fonction de n, pour tout $n \in \mathbb{N}$.
b) Démontrer votre conjecture par récurrence.
c) En déduire la limite de la suite (u_n).

n	u_n valeur approchée	u_n valeur exacte
0	0,5	1/2
1	0,33333333	1/3
2	0,25	1/4
3	0,2	1/5
4	0,16666667	1/6
5	0,14285714	1/7
6	0,125	1/8
7	0,11111111	1/9
8	0,1	1/10

Exercice n°5

La suite (u_n) est définie par $u_0 = 0$ et, $\forall n \in \mathbb{N}, u_{n+1} = u_n + 3n(n+1) + 1$.

a) Conjecturer une expression de u_n en fonction de n, pour tout $n \in \mathbb{N}$.
b) Démontrer votre conjecture par récurrence.
c) En déduire la limite de la suite (u_n).

Exercice n°6

On considère la suite (u_n) définie par $u_0 = 3$ et $u_{n+1} = \dfrac{2}{1+u_n}$ pour tout $n \in \mathbb{N}$.

a) Démontrer par récurrence que , $\forall n \in \mathbb{N}, u_n = 1 + \dfrac{6}{5 \times (-2)^n - 2}$.

b) En déduire la limite de la suite (u_n).

Exercice n°7

Démontrer par récurrence que, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, $\displaystyle\sum_{k=1}^{n} k^3 = \frac{n^2(n+1)^2}{4}$.