Comment étudie-t-on la convergence des suites ?

Exercice n°1

On considère l'algorithme ci-dessous :

```
from math import sqrt
def u(n):
    if n==0:
        a=1
    else:
        a=sqrt(2*u(n-1))
        return a
```

▶ 1. a) Quelle suite (u_n) est définie par l'algorithme ci-dessus ?
b) Déterminer les dix premières valeurs de cette suite.
c) Quelles conjectures peut-on émettre concernant la suite (u_n) ?
▶ 2. a) Démontrer par récurrence que, pour tout entier naturel n, $0 \leq u_n \leq u_{n+1} \leq 2$.
b) Que peut-on en déduire concernant la suite (u_n) ?

Exercice n°2

On considère la suite numérique (u_n) définie pour tout entier naturel n par

$$u_{n+1} = \frac{3\,u_n}{1+2u_n} \text{ et } u_0 = \frac{1}{2}.$$

▶ 1. Démontrer, par récurrence, que $u_n = \dfrac{3^n}{3^n+1}$ pour tout $n \in \mathbb{N}$.
▶ 2. Déterminer la limite de la suite (u_n).

Exercice n°3

La suite (v_n) est définie par $v_0 = 0$ et $v_{n+1} = \sqrt{v_n + 2}$ pour tout $n \in \mathbb{N}$.
▶ 1. Démontrer par récurrence que, pour tout entier naturel n, $0 \leq v_n \leq v_{n+1} \leq 2$.
▶ 2. Que peut-on en déduire concernant la suite (v_n) ?

Exercice n°4

La suite (v_n) est définie par $v_0 = -2$ et $v_{n+1} = v_n + 2n + 2$ pour tout $n \in \mathbb{N}$.
▶ 1. Démontrer que la suite est monotone.
▶ 2. Démontrer que $v_n \geq 2n - 2$ pour tout $n \in \mathbb{N}$.
▶ 3. En déduire la limite de la suite (v_n).

Exercice n°5

La suite (u_n) est définie par $u_0 = 0$ et $u_{n+1} = \sqrt{\frac{1}{2}(u_n)^2 + 8}$ pour tout $n \in \mathbb{N}$.
▶ 1. a) Démontrer, par récurrence, que pour tout $n \in \mathbb{N}$: $0 \leq u_n \leq u_{n+1} \leq 8$.
b) Que peut-on en déduire pour la suite (u_n) ?
▶ 2. Démontrer, par récurrence, que $\forall n \in \mathbb{N} : u_n = 4\sqrt{1 - \dfrac{1}{2^n}}$. En déduire la limite.