- Fiche n° 9
Comment utilise-t-on la continuité d'une fonction ?

Exercice n°1

Soit f la fonction définie sur $]-\infty; -4[\cup]-4; +\infty[$ par $f(x) = \dfrac{2+3x}{4+x}$.

▶ 1. Etudier la fonction f (limites, asymptotes, variations)

▶ 2. On définit la suite (u_n) par $u_0 = 3$ et $\forall n \in \mathbb{N}, u_{n+1} = f(u_n)$

a) Démontrer, par récurrence, que $\forall n \in \mathbb{N}, 0 \leq u_{n+1} \leq u_n \leq 3$

b) La suite (u_n) est-elle convergente ? Si oui, déterminer sa limite.

Exercice n°2

Soit la fonction $\begin{cases} h(x) = \dfrac{\sqrt{x^2+9}-3}{x^2} & \text{pour } x \neq 0 \\ h(0) = \dfrac{1}{6} \end{cases}$

▶ 1. Démontrer que pour tout $x \neq 0, h(x) = \dfrac{1}{\sqrt{x^2+9}+3}$.

▶ 2. Etudier, en justifiant, la continuité de la fonction h.

▶ 3. Etudier la limite de $h(x)$ en $+\infty$. La fonction h admet-elle une asymptote ?

▶ 4. Etudier, en justifiant, la parité de la fonction h, en déduire une symétrie pour sa courbe.

▶ 5. Démontrer que pour tout $x \neq 0, h'(x) = \dfrac{-x}{\sqrt{x^2+9}\left(\sqrt{x^2+9}+3\right)^2}$.

En déduire le tableau de variations de h.

▶ 6. Déterminer une équation de la tangente en 4 à la courbe de h.

Exercice n°3

PARTIE A : Soit la fonction g définie sur $\mathbb{R}$ par $g(x) = e^x - xe^x + 1$.

▶ 1. Déterminer les limites de g en $+\infty$ et en $-\infty$.

▶ 2. Etudier les variations de la fonction g et donner son tableau de variations.

▶ 3. Démontrer que l'équation $g(x) = 0$ admet une solution unique. On note α cette solution, donner un encadrement de α entre deux entiers consécutifs.

▶ 4. Démontrer que $e^\alpha = \dfrac{1}{\alpha - 1}$.

PARTIE B : Soit la fonction A définie sur $\mathbb{R}$ par $A(x) = \dfrac{4x}{e^x+1}$.

▶ 1. Déterminer les limites de A en $+\infty$ et en $-\infty$.

▶ 2. Etudier les variations de la fonction A et donner son tableau de variations.

PARTIE C : Soit la fonction f définie sur l'intervalle $[0; +\infty[$ par $f(x) = \dfrac{4}{e^x+1}$.

On note C sa courbe représentative dans un repère orthonormé $(O; \vec{\imath}; \vec{\jmath})$. La figure est donnée ci-dessous. Pour tout réel x positif ou nul, on note M le point de C de coordonnées $(x; f(x))$, P le point de coordonnées $(x; 0)$ et Q le point de coordonnées $(0; f(x))$.

▶ 1. Démontrer que l'aire du rectangle $OPMQ$ est maximale lorsque M a pour abscisse α (le réel α défini dans la partie A).

▶ 2. Le point M a pour abscisse α. La tangente T en M à la courbe C est-elle parallèle à la droite (PQ) ?