Terminale Spécialité Mathématiques
Tâche n° 1 0
Etudier les variations d'une fonction

Point méthode

Etudier les variations d'une fonction

- $f(x)$ • Pour étudier les variations d'une fonction
- $f'(x)$ • Je calcule la dérivée de la fonction
- $f'(x) > 0$ • J'étudie le signe de la dérivée
- Tableau • Je conclus en dressant le tableau de variations

Table des matières

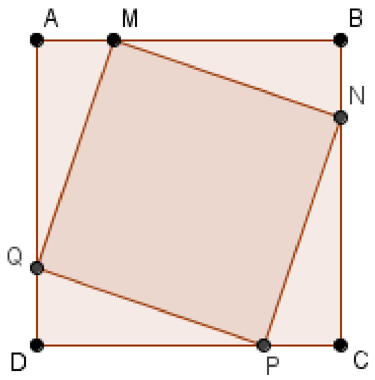
Tâche n° $\boxed{1}$ $\boxed{0}$
Etudier les variations d'une fonction
Enoncé des exercices

Exercice 1.

Soit f la fonction définie sur l'intervalle $]-\infty; 2[$, par $f(x) = \dfrac{1}{\sqrt{4-2x}}$.

a) Etudier les variations de la fonction f.
b) Déterminer une équation de la tangente à la courbe en 0.

Exercice 2.



Soit $ABCD$ un carré de côté 10 cm.
On considère les points M, N, P et Q respectivement sur $[AB]$, $[BC]$, $[CD]$ et $[AD]$ tels que :

$$AM = BN = CP = DQ = x \text{ cm.}$$

On admet que le quadrilatère $MNPQ$ est un carré, pour quelle valeur de x l'aire de $MNPQ$ est-elle minimale ?

Exercice 3.

Soit la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par $g(x) = x^3 - 3x^2 - 24x + 2$

a) Etudier les variations de la fonction f.
b) Déterminer une équation de la tangente en 0.

Exercice 4.

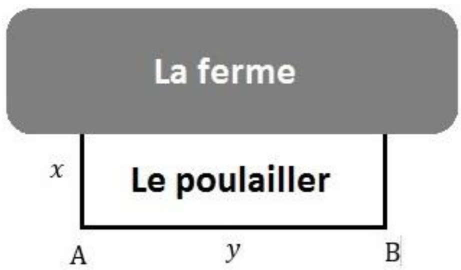
Soit g la fonction définie sur l'intervalle $\mathbb{R}$, par $g(x) = \dfrac{(5-4x)^9}{2}$.

a) Le fonction g est-elle monotone ? Justifier votre réponse.
b) Existe-t-il une tangente à la courbe de g parallèle à la droite $y = -18x$?

Exercice 5.

Un champ rectangulaire a pour longueur 50 m et pour largeur 40 m.
On diminue sa longueur de x mètres et on augmente sa largeur de x mètres.
On se demande comment évolue son aire.
Pour quelle valeur de x l'aire est-elle maximale ? Combien vaut-elle ?

Exercice 6.



Un fermier décide de réaliser un poulailler (en forme rectangulaire) le long du mur de sa maison. Ce poulailler devra avoir une aire de 392 m². **Où doit-il placer les**

piquets A et B pour que la longueur de la clôture soit minimale ?
La figure ci-contre représente le poulailler accolé à la ferme en vue de dessus. On appelle x la distance séparant chaque piquet au mur et y la distance entre les 2 piquets A et B.

Exercice 7.

Soit la fonction $f(x) = \dfrac{-2}{(2x+1)^3}$ définie sur $\left]-\infty; -\dfrac{1}{2}\right[\cup \left]-\dfrac{1}{2}; +\infty\right[$

a) La fonction f est-elle monotone ? Justifier votre réponse.

b) Existe-t-il une tangente à la courbe de f parallèle à la droite $y = 12x$?

Exercice 8.

Soit la fonction $h(x) = (3x+1)^4$ définie sur $\mathbb{R}$

a) Dresser le tableau de variations de la fonction h.

b) Déterminer l'équation de la tangente à la courbe en 1.

Exercice 9.

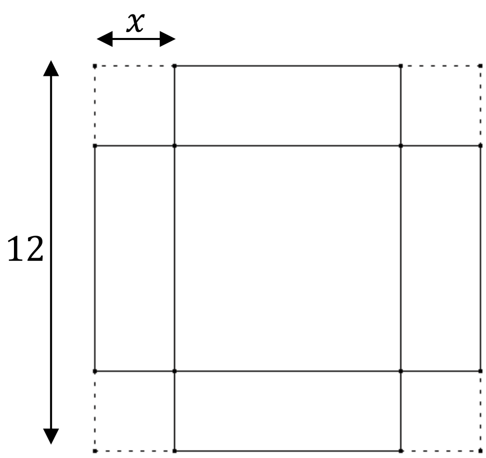
Soit la fonction $f(x) = \sqrt{1-x^2}$ définie sur $[-1; 1]$

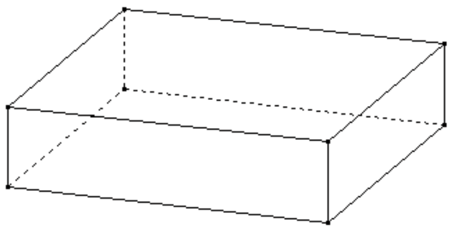
a) Dresser le tableau de variations de la fonction f.

b) Déterminer l'équation de la tangente à la courbe en 0,5.

Exercice 10.

Dans un carré de côté 12, on découpe dans les quatre angles des carrés de côté x pour construire le patron d'un pavé droit sans couvercle. ***Existe-t-il une valeur de x qui rend le volume maximal ? si oui, que vaut alors ce volume ?*** Justifiez votre réponse.





Tâche n° 1 0
Etudier les variations d'une fonction
Correction des exercices

Correction de l'exercice 1.

Soit f la fonction définie sur l'intervalle $]-\infty; 2[$, par $f(x) = \dfrac{1}{\sqrt{4-2x}}$.

a) Etudier les variations de la fonction f.
b) Déterminer une équation de la tangente à la courbe en 0.

Exercice 1.

a)

La fonction f est dérivable sur $]-\infty; 2[$.

$\forall x \in\,]-\infty; 2[, \quad f(x) = \dfrac{1}{\sqrt{4-2x}} = \dfrac{u}{v}$

$u = 1 \qquad u' = 0$

$v = \sqrt{4-2x} \qquad v' = \dfrac{-2}{2\sqrt{4-2x}} = \dfrac{-1}{\sqrt{4-2x}}$

$\forall x \in\,]-\infty; 2[, \quad f'(x) = \dfrac{u'v - uv'}{v^2} = \dfrac{-1 \times \dfrac{-1}{\sqrt{4-2x}}}{\left(\sqrt{4-2x}\right)^2}$

$f'(x) = \dfrac{\dfrac{1}{\sqrt{4-2x}}}{4-2x} = \dfrac{1}{\sqrt{4-2x}} \times \dfrac{1}{4-2x} = \dfrac{1}{(4-2x)\sqrt{4-2x}}$

$$\begin{aligned} f'(x) > 0 &\Leftrightarrow 4 - 2x > 0 \quad \text{car } \sqrt{4-2x} > 0 \\ &\Leftrightarrow -2x > -4 \\ &\Leftrightarrow x < \frac{-4}{-2} \\ &\Leftrightarrow x < 2 \end{aligned}$$

x	$-\infty$ $\quad$ 2
$f'(x)$	$+$
$f(x)$	$\nearrow$

<table>
<tr>
<td></td>
<td>b)</td>
<td>

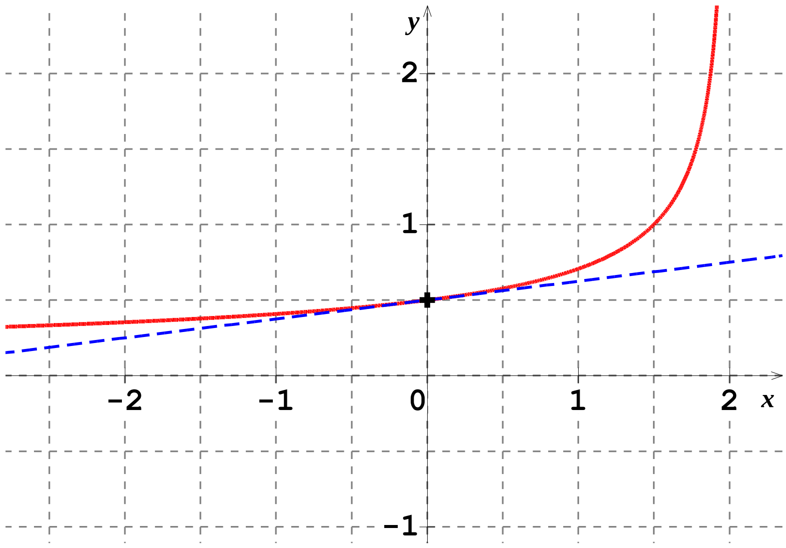
$$f(0) = \frac{1}{\sqrt{4-0}} = \frac{1}{2}$$

$$f'(0) = \frac{1}{(4-0)\sqrt{4-0}} = \frac{1}{8}$$

L'équation de la tangente est donc :

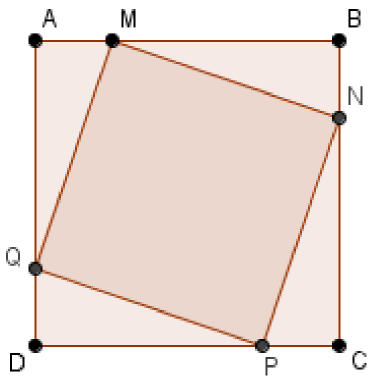
$$y = \frac{1}{8}(x-0) + \frac{1}{2}$$

$$y = \frac{1}{8}x + \frac{1}{2}$$



</td>
</tr>
</table>

Correction de l'exercice 2.



Soit $ABCD$ un carré de côté 10 cm.
On considère les points M, N, P et Q respectivement sur $[AB]$, $[BC]$, $[CD]$ et $[AD]$ tels que :

$$AM = BN = CP = DQ = x \text{ cm.}$$

On admet que le quadrilatère $MNPQ$ est un carré, pour quelle valeur de x l'aire de $MNPQ$ est-elle minimale ?

Exercice 2.

Pour tout $x \in [0; 10]$, on note $f(x)$ l'aire du quadrilatère $MNPQ$.

$f(x) = 10^2 - \dfrac{x \times (10 - x)}{2} \times 4$

$f(x) = 10^2 - 2x \times (10 - x)$

$f(x) = 100 - 20x + 2x^2$

La fonction f est dérivable sur $[0; 10]$.

$f'(x) = -20 + 4x$

$\forall x \in [0,10], \quad f'(x) = -20 + 4x$

$$\begin{aligned} f'(x) > 0 &\Leftrightarrow -20 + 4x > 0 \\ &\Leftrightarrow 4x > 20 \\ &\Leftrightarrow x > \frac{20}{4} \\ &\Leftrightarrow x > 5 \end{aligned}$$

x	0		5		10
$f'(x)$		$-$	0	$+$	
$f(x)$	100	$\searrow$	50	$\nearrow$	100

L'aire est minimale pour $x = 5$.

Correction de l'exercice 3.

Soit la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par $g(x) = x^3 - 3x^2 - 24x + 2$

a) Etudier les variations de la fonction f.

b) Déterminer une équation de la tangente en 0.

Exercice 3.

a)

La fonction g est dérivable sur $\mathbb{R}$.
$\forall x \in \mathbb{R}, \quad g(x) = x^3 - 3x^2 - 24x + 2$

$\forall x \in \mathbb{R}, \quad g'(x) = 3x^2 - 6x - 24$

$$\Delta = 36 - 4 \times 3 \times (-24) = 324 > 0$$

$$x_1 = \frac{6 - \sqrt{324}}{6} = \frac{6 - 18}{6} = -2$$

$$x_2 = \frac{6 + \sqrt{324}}{6} = \frac{6 + 18}{6} = 4$$

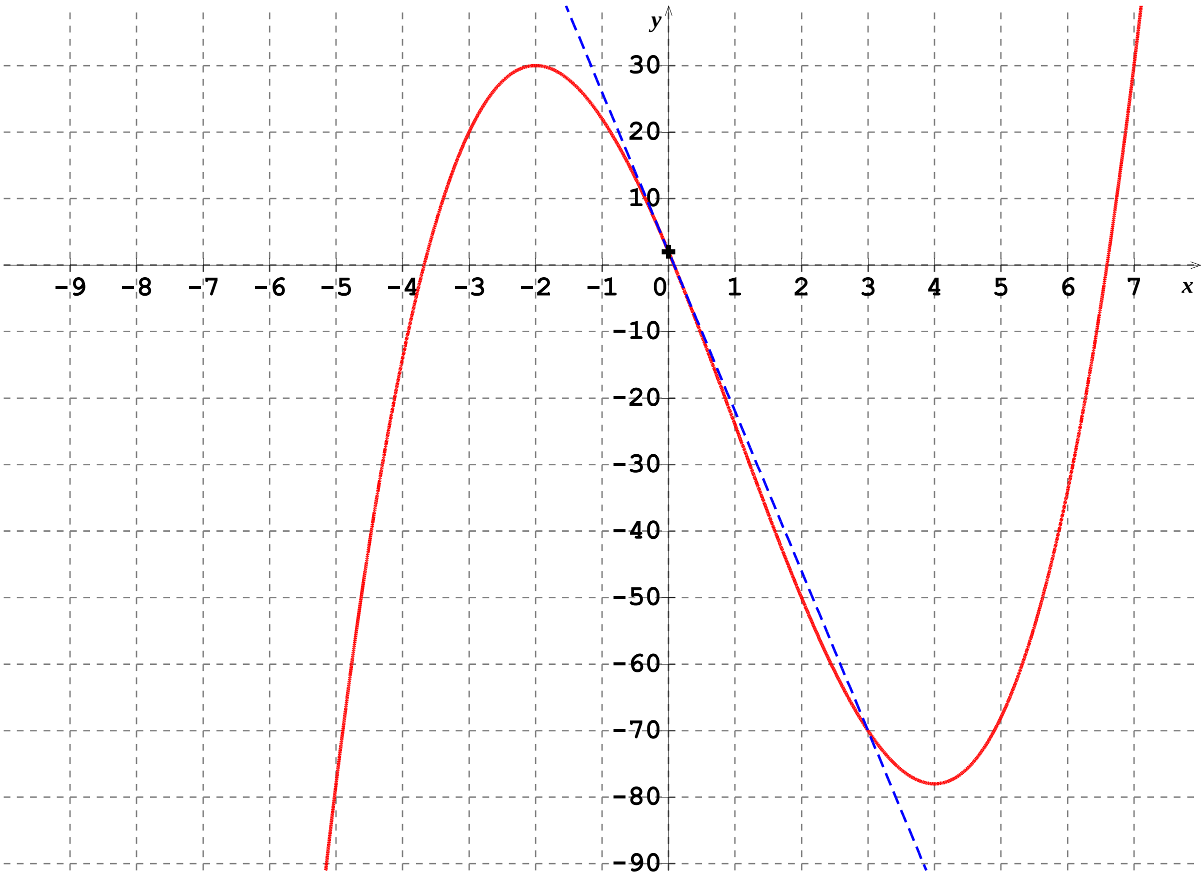
De plus, $a = 3 > 0$, donc la parabole est tournée vers le haut.

x	$-\infty$		-2		4		$+\infty$
$g'(x)$		$+$	0	$-$	0	$+$	
$g(x)$		$\nearrow$	30	$\searrow$	-78	$\nearrow$	

$g(-2) = -8 - 12 + 48 + 2 = 30$
$g(4) = 64 - 48 - 96 + 2 = -78$

b)

Le coefficient directeur de la tangente à la courbe en 0 vaut :
$g'(0) = -24$
$g(0) = 2$
L'équation de la tangente est donc $y = -24x + 2$



Correction de l'exercice 4.

Soit g la fonction définie sur l'intervalle $\mathbb{R}$, par $g(x)=\dfrac{(5-4x)^9}{2}$.

a) Le fonction g est-elle monotone ? Justifier votre réponse.

b) Existe-t-il une tangente à la courbe de g parallèle à la droite $y=-18x$?

Exercice 4.

a)

La fonction g est dérivable sur $\mathbb{R}$.

$$\forall x\in\mathbb{R},\quad g(x)=\frac{(5-4x)^9}{2}=u^9$$

$$(u^9)'=9\times u^8\times u'$$

$$\forall x\in\mathbb{R},\quad g'(x)=\frac{9\times(5-4x)^8\times(-4)}{2}=-18(5-4x)^8$$

$$\forall x\in\mathbb{R},\quad g'(x)<0\ \text{ car }\ -18<0\ \text{ et }\ (5-4x)^8>0$$

x	$-\infty$ $+\infty$
$g'(x)$	$+$
$g(x)$	$\searrow$

b)

Pour être parallèle à la droite $y=-18x$, le coefficient directeur de la tangente doit valoir -18.

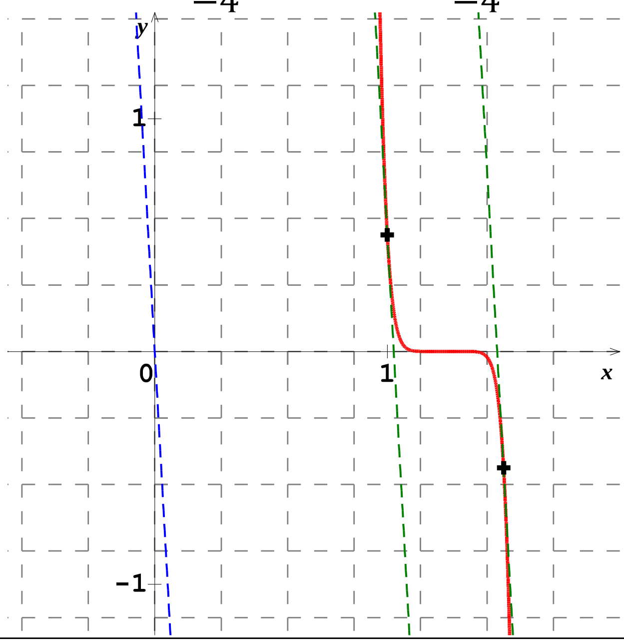
Je résous donc $g'(x)=-18=-18(5-4x)^8$

$$\Leftrightarrow (5-4x)^8=1$$

$$\Leftrightarrow 5-4x=1\ \text{ ou }\ 5-4x=-1$$

$$\Leftrightarrow -4x=-4\ \text{ ou }\ -4x=-6$$

$$\Leftrightarrow x=-\frac{4}{-4}=1\ \text{ ou }\ x=\frac{-6}{-4}=1{,}5$$



Correction de l'exercice 5.

Un champ rectangulaire a pour longueur 50 m et pour largeur 40 m.
On diminue sa longueur de x mètres et on augmente sa largeur de x mètres.
On se demande comment évolue son aire.
Pour quelle valeur de x l'aire est-elle maximale ? Combien vaut-elle ?

Exercice 5.

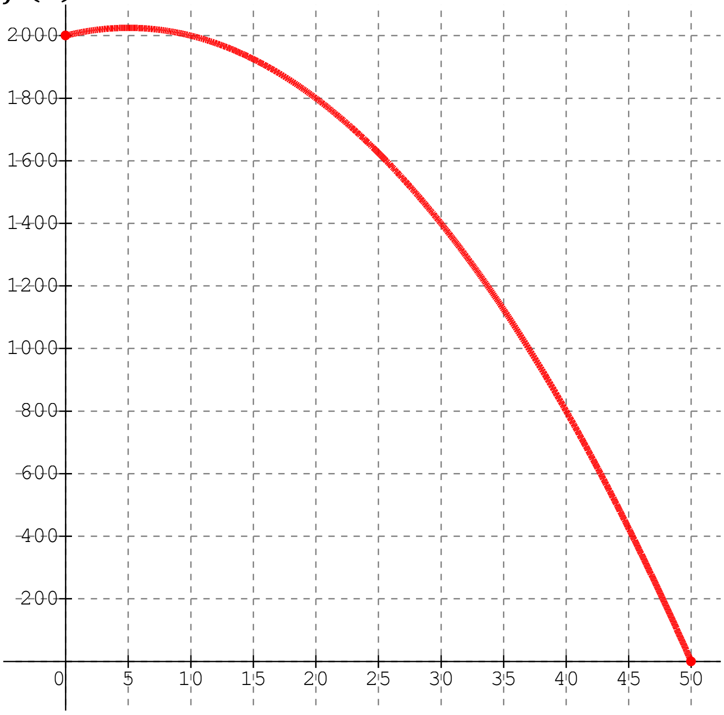
$\forall x \in [0, +\infty[$, notons $f(x)$ l'aire du champ.
$f(x) = (50 - x)(40 + x)$
$f(x) = 2000 + 50x - 40x - x^2$
$f(x) = 2000 + 10x - x^2$

La fonction f est dérivable sur $[0, +\infty[$.
$\forall x \in [0{,}10], \quad f'(x) = 10 - 2x$

$$\begin{aligned} f'(x) > 0 &\Leftrightarrow 10 - 2x > 0 \\ &\Leftrightarrow -2x > -10 \\ &\Leftrightarrow x < \frac{-10}{-2} \\ &\Leftrightarrow x < 5 \end{aligned}$$

x	0		5		50
$f'(x)$		$+$	0	$-$	
$f(x)$	2000	$\nearrow$	2025	$\searrow$	0

$f(5) = 2000 + 10 \times 5 - 5^2$
$f(5) = 2000 + 50 - 25$
$f(5) = 2025$



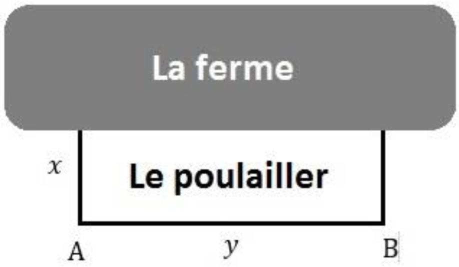
L'aire sera maximale pour $x = 5$ cm, et elle vaudra $f(5) = 2025$ cm².

Correction de l'exercice 6.

Un fermier décide de réaliser un poulailler (en forme rectangulaire) le long du mur de sa maison. Ce poulailler devra avoir une aire de 392 m².

Où doit-il placer les piquets A et B pour que la longueur de la clôture soit minimale ?

La figure ci-contre représente le poulailler accolé à la ferme en vue de dessus. On appelle x la distance séparant chaque piquet au mur et y la distance entre les 2 piquets A et B.



Exercice 6.

L'aire du poulailler est égale à $x \times y = 392$

donc $y = \dfrac{392}{x}$

$\forall x \in]0, +\infty[, \quad f(x) = x + y + x$

$f(x) = 2x + \dfrac{392}{x}$

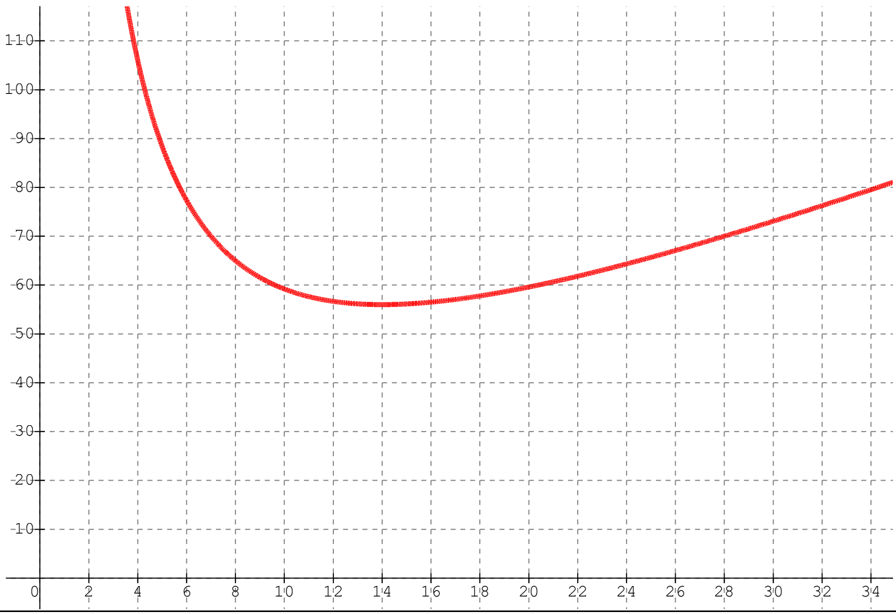
La fonction f est dérivable sur $]0, +\infty[$.

$\forall x \in]0, +\infty[, \quad f'(x) = 2 - \dfrac{392}{x^2} = \dfrac{2x^2 - 392}{x^2}$

$$\begin{aligned} f'(x) > 0 &\Leftrightarrow 2x^2 - 392 > 0 \\ &\Leftrightarrow 2x^2 > 392 \\ &\Leftrightarrow x^2 > \frac{392}{2} \\ &\Leftrightarrow x^2 > 196 \\ &\Leftrightarrow x > \sqrt{196} \text{ ou } \underbrace{x < -\sqrt{196}}_{\text{exclu}} \\ &\Leftrightarrow x > 14 \end{aligned}$$

x	0		14		$+\infty$
$f'(x)$		$-$	0	$+$	
$f(x)$		$\searrow$	56	$\nearrow$	

$f(14) = 56$



Correction de l'exercice 7.

Soit la fonction $f(x) = \dfrac{-2}{(2x+1)^3}$ définie sur $\left]-\infty; -\dfrac{1}{2}\right[\cup \left]-\dfrac{1}{2}; +\infty\right[$

a) La fonction f est-elle monotone ? Justifier votre réponse.

b) Existe-t-il une tangente à la courbe de f parallèle à la droite $y = 12x$?

Exercice 7.

a)

La fonction g est dérivable sur $\left]-\infty; -\frac{1}{2}\right[\cup \left]-\frac{1}{2}; +\infty\right[$.

Méthode n°1 :

$$\forall x \in \left]-\infty; -\frac{1}{2}\right[\cup \left]-\frac{1}{2}; +\infty\right[, \quad g(x) = \frac{-2}{(2x+1)^3} = \frac{u}{v}$$

$u = -2 \qquad\qquad u' = 0$

$v = (2x+1)^3 \qquad\qquad v' = 3 \times (2x+1)^2 \times 2 = 6(2x+1)^2$

$$\forall x \in \left]-\infty; -\frac{1}{2}\right[\cup \left]-\frac{1}{2}; +\infty\right[, \quad g'(x) = \frac{u'v - uv'}{v^2} = \frac{-(-2) \times 6(2x+1)^2}{((2x+1)^3)^2}$$

$$g'(x) = \frac{12(2x+1)^2}{(2x+1)^6} = \frac{12}{(2x+1)^4}$$

Méthode n°2 :

$$\forall x \in \left]-\infty; -\frac{1}{2}\right[\cup \left]-\frac{1}{2}; +\infty\right[, \quad g(x) = \frac{-2}{(2x+1)^3} = -2 \times (2x+1)^{-3}$$

$= u^{-3}$

$(u^{-3})' = -3 \times u^{-4} \times u'$

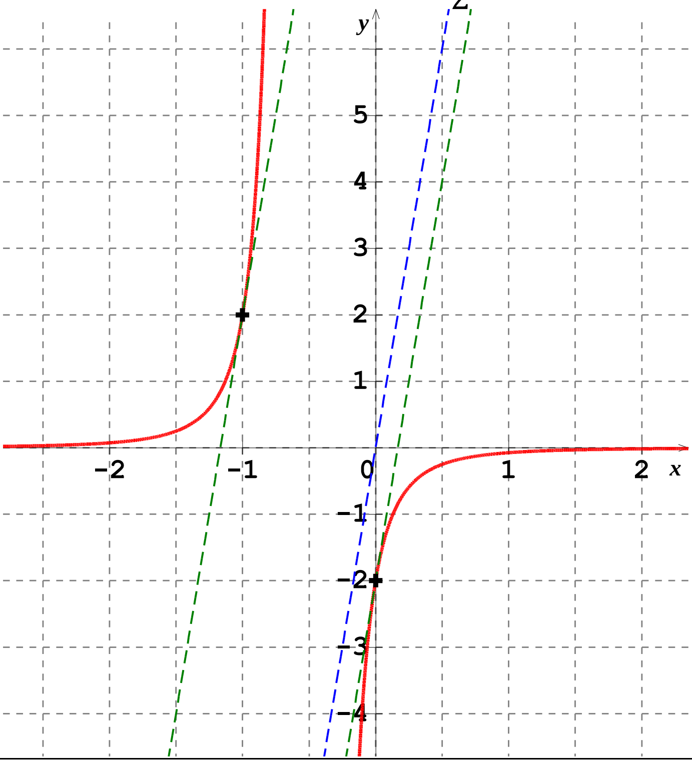
$$\forall x \in \left]-\infty; -\frac{1}{2}\right[\cup \left]-\frac{1}{2}; +\infty\right[, \quad g'(x) = -2 \times (-3) \times (2x+1)^{-4} \times 2$$

$$g'(x) = 12 \times (2x+1)^{-4} = \frac{12}{(2x+1)^4}$$

donc

$$\forall x \in \left]-\infty; -\frac{1}{2}\right[\cup \left]-\frac{1}{2}; +\infty\right[, \quad g'(x) > 0 \text{ car } (2x+1)^4 > 0$$

x	$-\infty$	$\frac{-1}{2}$	$+\infty$
$g'(x)$	$+$	‖	$+$
$g(x)$	$\nearrow$	‖	$\nearrow$

	b)	Résolvons $g'(x) = 12$ $\Leftrightarrow \dfrac{12}{(2x+1)^4} = 12$ $\Leftrightarrow \dfrac{12}{12} = (2x+1)^4$ $\Leftrightarrow (2x+1)^4 = 1$ $\Leftrightarrow 2x+1 = 1 \text{ ou } 2x+1 = -1$ $\Leftrightarrow 2x = 0 \text{ ou } 2x = -2$ $\Leftrightarrow x = 0 \text{ ou } x = -\dfrac{2}{2} = -1$ 

Correction de l'exercice 8.

Soit la fonction $h(x) = (3x+1)^4$ définie sur $\mathbb{R}$

a) Dresser le tableau de variations de la fonction h.

b) Déterminer l'équation de la tangente à la courbe en 1.

Exercice 8.

a)

La fonction h est dérivable sur $\mathbb{R}$.

$\forall x \in \mathbb{R}, \quad h(x) = (3x+1)^4 = u^4$

$(u^4)' = 4 \times u^3 \times u'$

$\forall x \in \mathbb{R}, \quad h'(x) = 4 \times (3x+1)^3 \times 3 = 12(3x+1)^3$

$$h'(x) > 0 \Leftrightarrow 3x+1 > 0$$
$$\Leftrightarrow x > -\frac{1}{3}$$

x	$-\infty$		$\frac{-1}{3}$		$+\infty$
$h'(x)$		$-$	0	$+$	
$h(x)$		$\searrow$	0	$\nearrow$	

$$h\left(-\frac{1}{3}\right) = \left(3 \times -\frac{1}{3} + 1\right)^4 = 0$$

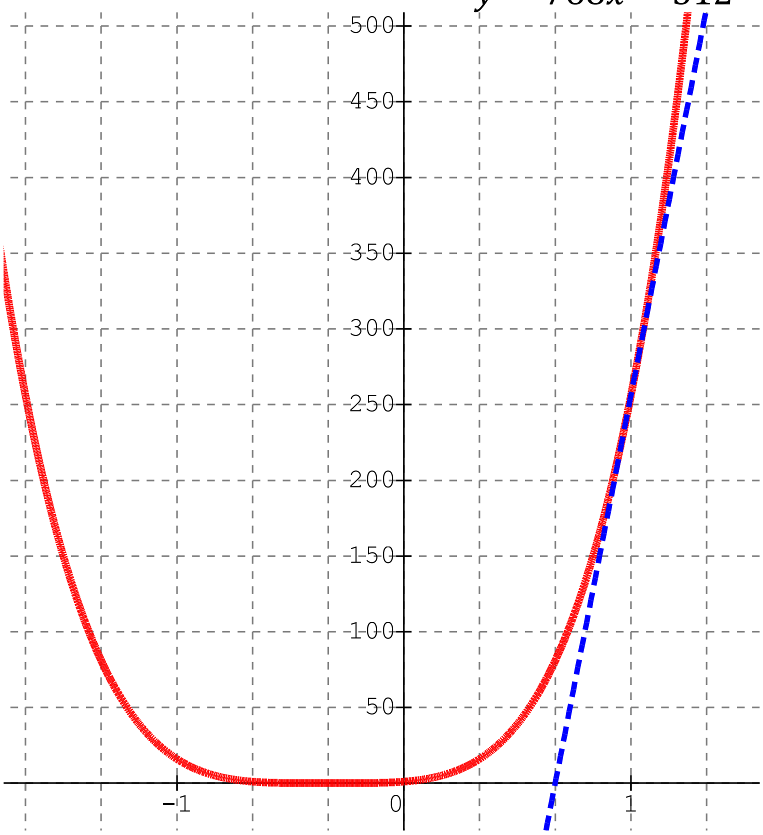
b)

Le coefficient directeur de la tangente à la courbe en 1 vaut :

$$h'(1) = 12(3+1)^3 = 768$$
$$h(1) = (3+1)^4 = 256$$

L'équation de la tangente est donc $y = 768(x-1) + 256$

$$y = 768x - 512$$



Correction de l'exercice 9.

Soit la fonction $f(x) = \sqrt{1-x^2}$ définie sur $[-1; 1]$

a) Dresser le tableau de variations de la fonction f.

b) Déterminer l'équation de la tangente à la courbe en 0,5.

Exercice 9.

a)

La fonction f est dérivable sur $]-1;1[$.

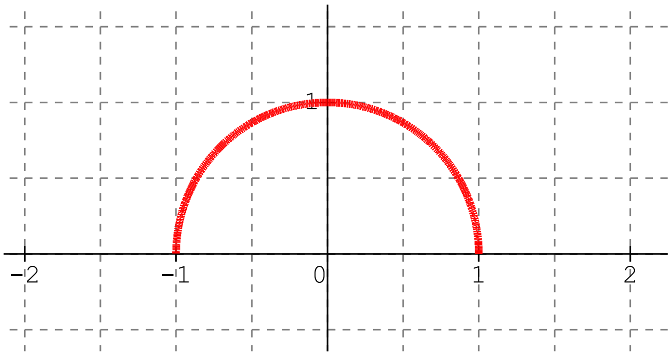
$\forall x \in [-1;1], \quad f(x) = \sqrt{1-x^2} = \sqrt{u}$

$$(\sqrt{u})' = \frac{u'}{2\sqrt{u}}$$

$$\forall x \in]-1;1[, \quad f'(x) = \frac{-2x}{2\sqrt{1-x^2}} = \frac{-x}{\sqrt{1-x^2}}$$

$$f'(x) > 0 \Leftrightarrow -x > 0$$
$$\Leftrightarrow x < 0$$

x	-1		0		1
$f'(x)$		$+$	0	$-$	
$f(x)$	0	$\nearrow$	1	$\searrow$	0



$$f(0) = \sqrt{1-0^2} = 1$$

b)

Le coefficient directeur de la tangente à la courbe en 0,5 vaut :

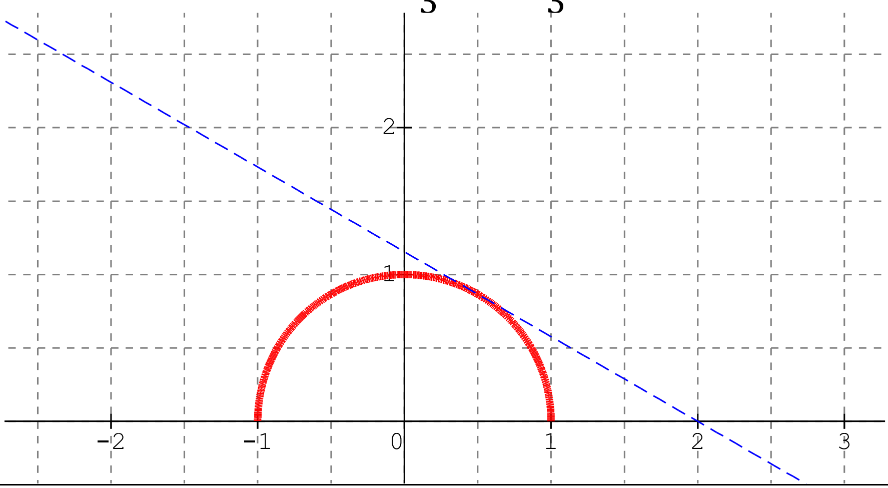
$$f'\left(\frac{1}{2}\right) = \frac{-\frac{1}{2}}{\sqrt{1-\frac{1}{4}}} = \frac{-\frac{1}{2}}{\sqrt{\frac{3}{4}}} = \frac{-\frac{1}{2}}{\frac{\sqrt{3}}{2}} = -\frac{1}{2} \times \frac{2}{\sqrt{3}} = -\frac{1}{\sqrt{3}} = -\frac{\sqrt{3}}{3}$$

$$f\left(\frac{1}{2}\right) = \sqrt{1-\frac{1}{4}} = \sqrt{\frac{3}{4}} = \frac{\sqrt{3}}{2}$$

L'équation de la tangente est donc $y = -\frac{\sqrt{3}}{3}\left(x - \frac{1}{2}\right) + \frac{\sqrt{3}}{2}$

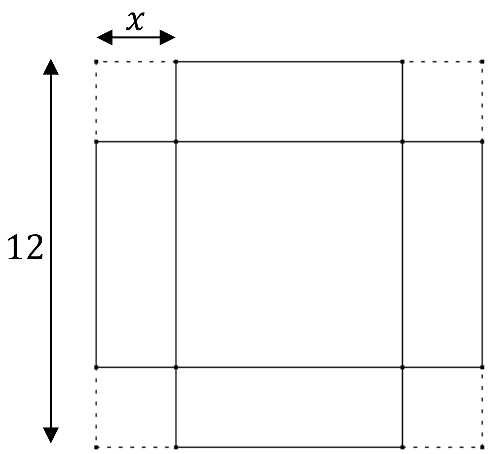
$$y = -\frac{\sqrt{3}}{3}x + \frac{\sqrt{3}}{6} + \frac{3\sqrt{3}}{6}$$

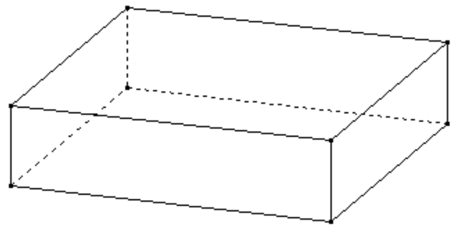
$$y = -\frac{\sqrt{3}}{3}x + \frac{2\sqrt{3}}{3}$$



Correction de l'exercice 10.

Dans un carré de côté 12, on découpe dans les quatre angles des carrés de côté x pour construire le patron d'un pavé droit sans couvercle. ***Existe-t-il une valeur de x qui rend le volume maximal ? si oui, que vaut alors ce volume ?*** Justifiez votre réponse.





Exercice 10.

Pour $x \in [0,6]$, notons $f(x)$ le volume du pavé obtenu par pliage

$f(x) = L \times l \times h$

$f(x) = (12 - 2x) \times (12 - 2x) \times x$

$f(x) = (12 - 2x)^2 \times x$

$f(x) = (144 - 48x + 4x^2) \times x$

$f(x) = 144x - 48x^2 + 4x^3$

$\forall x \in [0,6], \quad f'(x) = 144 - 96x + 12x^2$

$$\Delta = 9216 - 4 \times 144 \times 12 = 2304 > 0$$

$$x_1 = \frac{96 - \sqrt{2304}}{24} = 2$$

$$x_2 = \frac{96 + \sqrt{2304}}{24} = 6$$

De plus, $a = 12 > 0$, donc la parabole est tournée vers le haut.

x	0		2		6
$f'(x)$		$+$	0	$-$	
$f(x)$	0	$\nearrow$	128	$\searrow$	0

$$f(2) = 288 - 192 + 32 = 128$$

Le volume est donc maximum pour $x = 2$ et il vaut 128 cm^2.