Terminale Spécialité Mathématiques
Tâche n° 1 1
Cas particulier de la fonction exponentielle

LA FONCTION EXPONENTIELLE
BILAN DES PROPRIETES

$$e^0 = 1 \qquad e^1 = e$$

$$\forall a \in \mathbb{R}, b \in \mathbb{R}, \quad e^{a+b} = e^a \times e^b$$

$$e^{-a} = \frac{1}{e^a} \qquad e^{a-b} = \frac{e^a}{e^b}$$

$$\forall a \in \mathbb{R}, n \in \mathbb{N}, \quad (e^a)^n = e^{na}$$

$$(e^x)' = e^x \qquad (e^u)' = u'e^u$$

Table des matières

Tâche n° $\boxed{1}$ $\boxed{1}$
Cas particulier de la fonction exponentielle

Enoncé des exercices

Exercice 1.

Soit f la fonction définie sur $\mathbb{R}$, par $f(x) = (2x+1)e^{-x}$.

a) Etudier les variations de la fonction f.

b) Déterminer une équation de la tangente à la courbe en 0.

Exercice 2.

Soit g la fonction définie sur $\mathbb{R}$, par $g(x) = x^2 e^{-2x}$.

a) Etudier les variations de la fonction g.

b) Déterminer une équation de la tangente à la courbe en $\frac{1}{2}$.

Exercice 3.

Partie A : Soit la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par $g(x) = e^x - x - 1$

a) Etudier les variations de la fonction g.

b) En déduire le signe de la fonction g.

c) Que peut-on déduire concernant $e^x - x$, pour tout réel x ?

Partie B : Soit la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = \dfrac{e^x}{e^x - x}$.

a) Etudier les variations de la fonction f.

b) Déterminer une équation de la tangente à la courbe de f en 0.

Exercice 4.

On donne ci-dessous une petite partie de la courbe représentative $\mathcal{C}$ d'une fonction f définie et dérivable sur $\mathbb{R}$, dans un repère orthonormé du plan.

Partie A.

▶ 1. La valeur de $f(0)$ est :

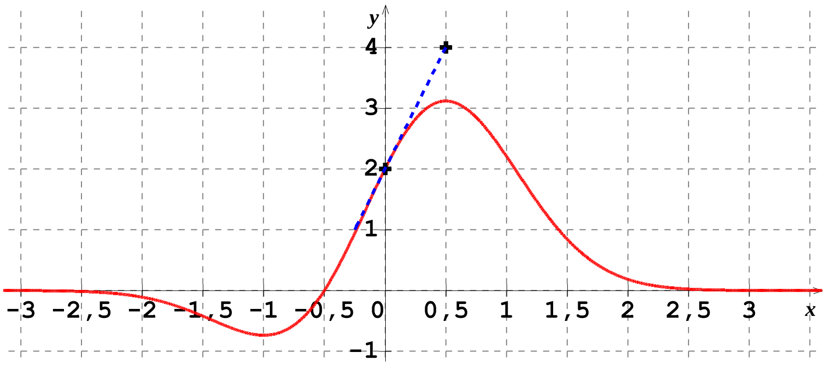
a) -2 b) 2

c) -1 d) -0.5

▶ 2. La valeur de $f'(0)$ est :

a) -2 b) $4/3$

c) 1.5 d) 4



Partie B.

La fonction f représentée dans la Partie A est définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = (ax+b)e^{-x^2}$.

▶ 1. Déterminer, en justifiant, les valeurs de a et b.

▶ 2. Déterminer, en justifiant, le tableau de variation de la fonction f.

Exercice 5.

On considère les fonctions définies sur $\mathbb{R}$, $f(x) = \dfrac{xe^x + 1}{e^x}$ et $g(x) = 2 - e^{-2x} - 2x$.

Existe-t-il une abscisse x telle que les tangentes aux courbes respectives de f et g aient le même coefficient directeur ? (On pourra penser à un changement de variable ...)

Tâche n° 1 1
Cas particulier de la fonction exponentielle
Correction des exercices

Correction de l'exercice 1.

Soit f la fonction définie sur $\mathbb{R}$, par $f(x) = (2x+1)e^{-x}$.

a) Etudier les variations de la fonction f.

b) Déterminer une équation de la tangente à la courbe en 0.

<table>
<tr>
<td>Exercice 1.</td>
<td>a)</td>
<td>
La fonction f est dérivable sur $\mathbb{R}$.
$\forall x \in \mathbb{R}, \quad f(x) = (2x+1)e^{-x} = u \times v$

$u = 2x+1 \qquad u' = 2$
$v = e^{-x} \qquad v' = e^{-x} \times (-1) = -e^{-x}$

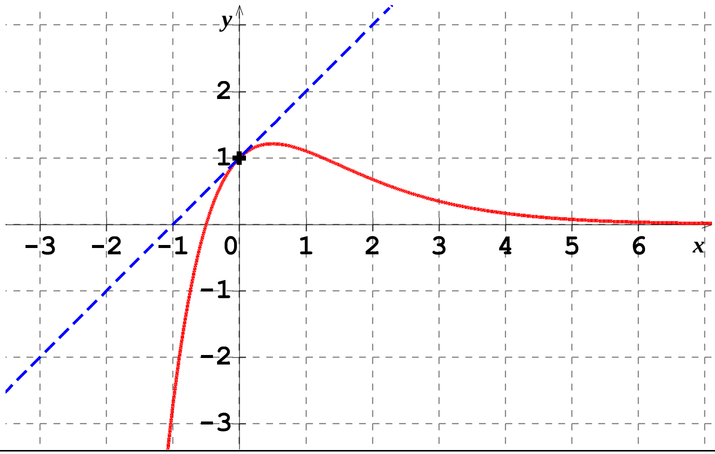
$\forall x \in \mathbb{R}, \quad f'(x) = u'v + uv' = 2e^{-x} + (2x+1)(-e^{-x})$
$f'(x) = 2e^{-x} - 2xe^{-x} - e^{-x}$
$f'(x) = e^{-x} - 2xe^{-x}$
$f'(x) = (1-2x)e^{-x}$

$$f'(x) > 0 \Leftrightarrow 1 - 2x > 0 \quad \text{car} \;\; e^{-x} > 0$$
$$\Leftrightarrow -2x > -1$$
$$\Leftrightarrow x < \frac{-1}{-2}$$
$$\Leftrightarrow x < \frac{1}{2}$$
$$\begin{array}{|c|ccccc|}
\hline
x & -\infty & & \frac{1}{2} & & +\infty \\
\hline
f'(x) & & + & 0 & - & \\
\hline
f(x) & & \nearrow & 2e^{-1/2} & \searrow & \\
\hline
\end{array}$$
$$f\left(\frac{1}{2}\right) = 2e^{-1/2}$$
</td>
</tr>
</table>

b)

$f(0) = e^{-0} = 1$
$f'(0) = e^{-0} = 1$
L'équation de la tangente est donc :

$$y = 1(x - 0) + 1$$
$$y = x + 1$$



Correction de l'exercice 2.

Soit g la fonction définie sur $\mathbb{R}$, par $g(x) = x^2e^{-2x}$.

a) Etudier les variations de la fonction g.

b) Déterminer une équation de la tangente à la courbe en $\frac{1}{2}$.

Exercice 2.

a)

La fonction g est dérivable sur $\mathbb{R}$.
$\forall x \in \mathbb{R}, \quad g(x) = x^2e^{-2x} = u \times v$

$u = x^2 \qquad\qquad u' = 2x$
$v = e^{-2x} \qquad\qquad v' = e^{-2x} \times (-2) = -2e^{-2x}$

$\forall x \in \mathbb{R}, \quad g'(x) = u'v + uv' = 2xe^{-2x} + x^2(-2e^{-2x})$
$g'(x) = 2xe^{-2x} - 2x^2e^{-2x}$
$g'(x) = 2xe^{-2x}(1 - x)$

$$g'(x) > 0 \Leftrightarrow x(1-x) > 0 \quad \text{car} \quad 2e^{-2x} > 0$$

x	$-\infty$		0		1		$+\infty$
x		$-$	0	$+$		$+$	
$1-x$		$+$		$+$	0	$-$	
$g'(x)$		$-$	0	$+$	0	$-$	
$g(x)$		$\searrow$	0	$\nearrow$	e^{-2}	$\searrow$	

b)

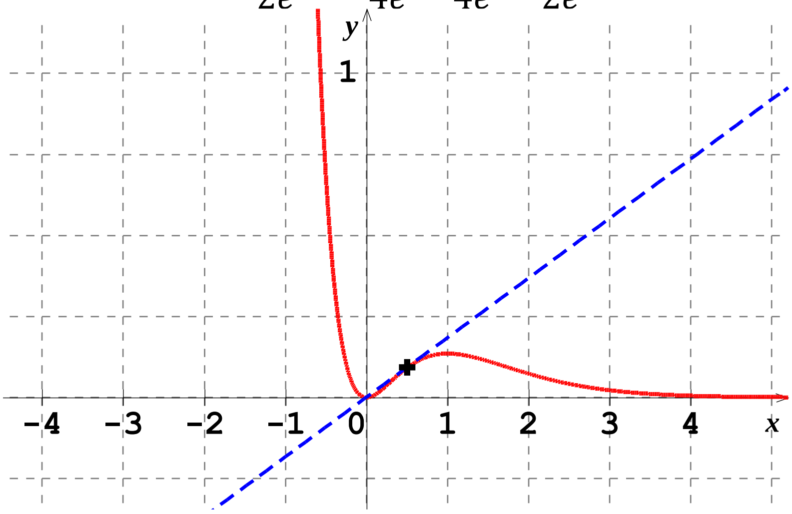
$$g\left(\frac{1}{2}\right) = \frac{1}{4}e^{-1} = \frac{1}{4e}$$

$$g'\left(\frac{1}{2}\right) = e^{-1} \times \frac{1}{2} = \frac{1}{2e}$$

L'équation de la tangente est donc :

$$y = \frac{1}{2e}\left(x - \frac{1}{2}\right) + \frac{1}{4e}$$

$$y = \frac{1}{2e}x - \frac{1}{4e} + \frac{1}{4e} = \frac{1}{2e}x$$



Correction de l'exercice 3.

Partie A : Soit la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par $g(x) = e^x - x - 1$

a) Etudier les variations de la fonction g.

b) En déduire le signe de la fonction g.

c) Que peut-on déduire concernant $e^x - x$, pour tout réel x ?

Partie B : Soit la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = \dfrac{e^x}{e^x - x}$.

a) Etudier les variations de la fonction f.

b) Déterminer une équation de la tangente à la courbe de f en 0.

Exercice 3.

A.a)

La fonction g est dérivable sur $\mathbb{R}$.

$\forall x \in \mathbb{R}, \quad g'(x) = e^x - 1$

$$\begin{aligned} g'(x) > 0 &\Leftrightarrow e^x - 1 > 0 \\ &\Leftrightarrow e^x > 1 \\ &\Leftrightarrow e^x > e^0 \\ &\Leftrightarrow x > 1 \end{aligned}$$

x	$-\infty$		1		$+\infty$
$g'(x)$		$-$	0	$+$	
$g(x)$		$\searrow$	0	$\nearrow$	

<table>
<tr><td></td><td>A.b)</td><td>La fonction g admet donc 0 pour minimum, elle est donc positive pour tout réel x.</td></tr>
<tr><td></td><td>A.c)</td><td>

$$\forall x \in \mathbb{R}, \quad g(x) = e^x - x - 1 \geq 0$$
$$\Leftrightarrow e^x - x \geq 1$$
$$\text{et donc,} \qquad \forall x \in \mathbb{R} \quad e^x - x > 0$$

</td></tr>
<tr><td></td><td>B.a)</td><td>

La fonction f est dérivable sur $\mathbb{R}$.

$$\forall x \in \mathbb{R}, \quad f(x) = \frac{e^x}{e^x - x} = \frac{u}{v}$$

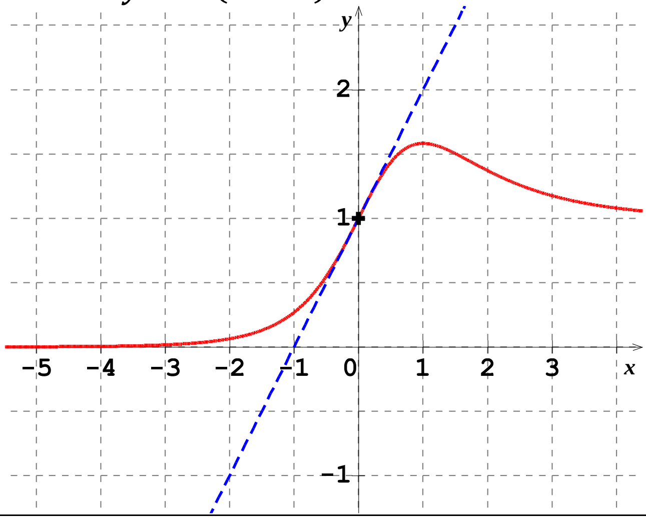
$$u = e^x \qquad u' = e^x$$
$$v = e^x - x \qquad v' = e^x - 1$$

$$\forall x \in \mathbb{R}, \quad f'(x) = \frac{u'v - uv'}{v^2} = \frac{e^x(e^x - x) - e^x(e^x - 1)}{(e^x - x)^2}$$
$$f'(x) = \frac{e^{2x} - xe^x - e^{2x} + e^x}{(e^x - x)^2}$$
$$f'(x) = \frac{e^x - xe^x}{(e^x - x)^2}$$
$$f'(x) = \frac{(1 - x)e^x}{(e^x - x)^2}$$

$$f'(x) > 0 \Leftrightarrow 1 - x > 0 \text{ car } \frac{e^x}{(e^x - x)^2} > 0$$
$$\Leftrightarrow 1 > x$$

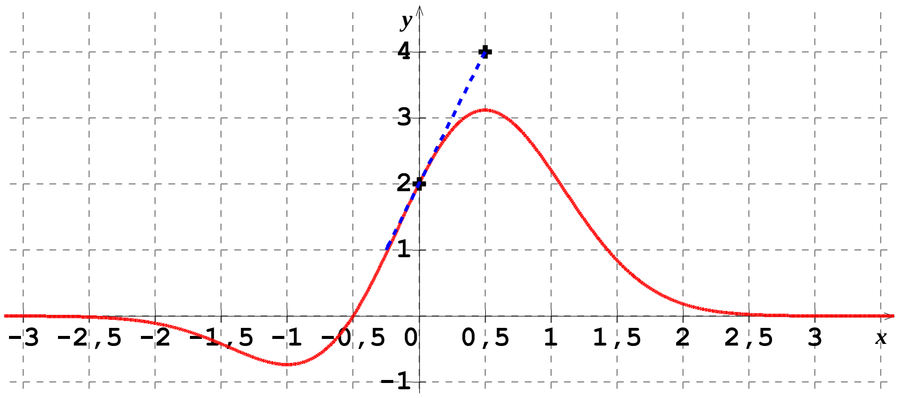
<table>
<tr><td>x</td><td>$-\infty$</td><td>1</td><td>$+\infty$</td></tr>
<tr><td>$f'(x)$</td><td>$+$</td><td>0</td><td>$-$</td></tr>
<tr><td>$f(x)$</td><td>$\nearrow$</td><td>$\frac{e}{e-1}$</td><td>$\searrow$</td></tr>
</table>

</td></tr>
</table>

<table>
<tr><td></td><td>B.b)</td><td>$f(0) = 1$
$f'(0) = 1$
L'équation de la tangente est donc :
$$y = 1(x - 0) + 1 = x + 1$$

</td></tr>
</table>

Correction de l'exercice 4.

On donne ci-dessous une petite partie de la courbe représentative $\mathcal{C}$ d'une fonction f définie et dérivable sur $\mathbb{R}$, dans un repère orthonormé du plan.



Partie A.

▶ 1. La valeur de $f(0)$ est :

a) -2 b) 2

c) -1 d) -0.5

▶ 2. La valeur de $f'(0)$ est :

a) -2 b) $4/3$

c) 1.5 d) 4

Partie B.

La fonction f représentée dans la partie A est définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = (ax + b)e^{-x^2}$.

▶ 1. Déterminer, en justifiant, les valeurs de a et b.

▶ 2. Déterminer, en justifiant, le tableau de variation de la fonction f.

Exercice 4.	**A1.**	$f(0)$ représente l'ordonnée du point de la courbe de f d'abscisse 0 soit : $f(0) = 2$
	A2.	$f'(0)$ représente l'ordonnée du point de la courbe de f d'abscisse 0 soit : $f'(0) = \frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{4-2}{0.5-0} = \frac{2}{0.5} = 4$

B1.

$$f(0) = (a \times 0 + b)e^{-0^2} = 2$$
$$\Leftrightarrow b = 2$$
$$\text{donc } f(x) = (ax + 2)e^{-x^2}$$

f est dérivable sur $\mathbb{R}$

$\forall x \in \mathbb{R}, \quad f'(x) = ae^{-x^2} - 2x(ax + 2)e^{-x^2}$

$f'(x) = (a - 2ax^2 - 4x)e^{-x^2}$

$f'(x) = (-2ax^2 - 4x + a)e^{-x^2}$

$f'(0) = (-2a \times 0^2 - 4 \times 0 + a)e^{-0^2} = 4 = a$

$$f(x) = (4x + 2)e^{-x^2}$$

B2.

$\forall x \in \mathbb{R}, \quad f'(x) = (4 - 8x^2 - 4x)e^{-x^2}$

$f'(x) > 0 \Leftrightarrow 4 - 8x^2 - 4x > 0$ car $e^{-x^2}>0$

$$\Delta = 4^2 - 4 \times (-8) \times 4 = 144 = 12^2 > 0$$
$$x_1 = \frac{4 - 12}{-16} = \frac{1}{2} \quad \text{ou} \quad x_2 = \frac{4 + 12}{-16} = -1$$

$a = -8 < 0$ donc la parabole est tournée vers le bas :

x	$-\infty$		-1		$\frac{1}{2}$		$+\infty$
$f'(x)$		$-$	0	$+$	0	$-$	
$f(x)$		↘	$\frac{-2}{e}$	↗	$4e^{-1/4}$	↘	

$f(-1) = (-4 + 2)e^{-1} = -\dfrac{2}{e}$

$f\left(\dfrac{1}{2}\right) = \left(\dfrac{4}{2} + 2\right)e^{-1/4} = 4e^{-1/4}$

Correction de l'exercice 5.

On considère les fonctions définies sur $\mathbb{R}$, $f(x) = \dfrac{xe^x + 1}{e^x}$ et $g(x) = 2 - e^{-2x} - 2x$.

Existe-t-il une abscisse x telle que les tangentes aux courbes respectives de f et g aient le même coefficient directeur ? (On pourra penser à un changement de variable …)

Exercice 5.

f est dérivable sur $\mathbb{R}$

$\forall x \in \mathbb{R}, \quad f'(x) = \dfrac{(1 \times e^x + xe^x)e^x - (xe^x + 1)e^x}{(e^x)^2}$

$f'(x) = \dfrac{e^{2x} + xe^{2x} - xe^{2x} - e^x}{e^{2x}}$

$f'(x) = \dfrac{e^{2x} - e^x}{e^{2x}}$

g est dérivable sur $\mathbb{R}$

$\forall x \in \mathbb{R}, \quad g'(x) = -(-2)e^{-2x} - 2$

$g'(x) = 2e^{-2x} - 2$

Les tangentes aux courbes respectives de f et g auront le même coefficient directeur lorsque :

$$f'(x) = g'(x)$$

$$\frac{e^{2x} - e^{x}}{e^{2x}} = 2e^{-2x} - 2$$

$$\Leftrightarrow e^{2x} - e^{x} = (2e^{-2x} - 2)e^{2x}$$

$$\Leftrightarrow e^{2x} - e^{x} = 2 - 2e^{2x}$$

$$\Leftrightarrow 3e^{2x} - e^{x} - 2 = 0$$

On pose $X = e^{x}$ alors $X^2 = (e^{x})^2 = e^{2x}$

On a alors :

$$3X^2 - X - 2 = 0$$

$$\Delta = 1^2 - 4 \times (-2) \times 3 = 25 = 5^2 > 0$$

$$X_1 = \frac{1-5}{6} = \frac{-4}{6} = -\frac{2}{3} \quad \text{ou} \quad X_2 = \frac{1+5}{6} = 1$$

On obtient que :

$$\underbrace{e^{x} = -\frac{2}{3}}_{\text{pas de solution}} \quad \text{ou} \quad e^{x} = 1 = e^{0}$$

La seule solution est $x = 0$.