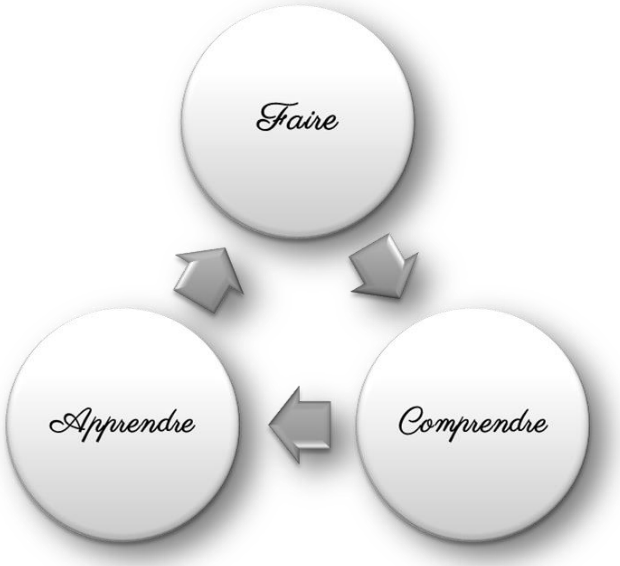
# Terminale Spécialité Mathématiques
## Tâche n° $\boxed{1}$ $\boxed{2}$
## Déterminer les limites des fontions




## Table des matières

Enoncé des exercices ........ 2
Exercice 1 ........ 2
Exercice 2 ........ 2
Exercice 3 ........ 2
Exercice 4 ........ 2
Exercice 5 ........ 2
Exercice 6 ........ 2
Correction des exercices ........ 3
Correction de l'exercice 1. ........ 3
Correction de l'exercice 2. ........ 4
Correction de l'exercice 3. ........ 5
Correction de l'exercice 4. ........ 6
Correction de l'exercice 5. ........ 7
Correction de l'exercice 6. ........ 8

# Tâche n° 1 2
# Déterminer les limites des fontions
## Enoncé des exercices

### Exercice 1.

Déterminer les limites des fonctions suivantes, définies sur l'intervalle donné, *on donnera les éventuelles asymptotes horizontales ou verticales* :

▶1. $f(x) = \dfrac{4}{(1-3x)^2}$ sur $\left]\dfrac{1}{3}; +\infty\right[$

▶2. $g(x) = \dfrac{-4}{2x+1}$ sur $\left]-\dfrac{1}{2}\,; +\infty\right[$

### Exercice 2.

Déterminer les limites des fonctions suivantes, définies sur l'intervalle donné, *on donnera les éventuelles asymptotes horizontales ou verticales* :

▶1. $f(x) = x^3 - 5x + 1$ sur $\mathbb{R}$

▶2. $g(x) = \dfrac{3x+1}{7-4x}$ sur $\left]-\infty; \dfrac{7}{4}\right[$

### Exercice 3.

Déterminer les limites des fonctions suivantes, définies sur l'intervalle donné, *on donnera les éventuelles asymptotes horizontales ou verticales* :

▶1. $f(x) = \dfrac{1}{\sqrt{x^2+3}}$ sur $\mathbb{R}$

▶2. $g(x) = \dfrac{5x+1}{x^2-1}$ sur $]-1; 1[$

### Exercice 4.

Déterminer les limites des fonctions suivantes, définies sur l'intervalle donné, *on donnera les éventuelles asymptotes horizontales ou verticales* :

▶1. $f(x) = \sqrt{x^2+3x+3}$ sur $[0; +\infty[$

▶2. $g(x) = \dfrac{3-2x}{x+7}$ sur $]-7; +\infty[$

### Exercice 5.

Déterminer les limites des fonctions suivantes, définies sur l'intervalle donné, *on donnera les éventuelles asymptotes horizontales ou verticales* :

▶1. $f(x) = x\,(e^x - x)$ sur $\mathbb{R}$

▶2. $g(x) = \dfrac{e^x+3}{x-1}$ sur $]1; +\infty[$

### Exercice 6.

Déterminer les limites des fonctions suivantes, définies sur l'intervalle donné, *on donnera les éventuelles asymptotes horizontales ou verticales* :

▶1. $f(x) = 5x^3 - xe^x$ sur $\mathbb{R}$

▶2. $g(x) = \dfrac{e^x-2}{e^x+1}$ sur $\mathbb{R}$

# Tâche n° $\boxed{1}$ $\boxed{2}$
# Déterminer les limites des fontions
## Correction des exercices

### Correction de l'exercice 1.

Déterminer les limites des fonctions suivantes, définies sur l'intervalle donné, *on donnera les éventuelles asymptotes horizontales ou verticales* :

▶1. $f(x) = \dfrac{4}{(1-3x)^2}$ sur $\left]\dfrac{1}{3}\,;+\infty\right[$

▶2. $g(x) = \dfrac{-4}{2x+1}$ sur $\left]-\dfrac{1}{2}\,;+\infty\right[$

<table>
<tr>
<td rowspan="2">Exercice 1.</td>
<td>1.</td>
<td>

**Limite en $\dfrac{1}{3}^+$ :**

$\lim\limits_{\substack{x \to \frac{1}{3}^+ \\ x \approx 0,4}} 1 - 3x = 0^-$ donc $\lim\limits_{x \to \frac{1}{3}^+} (1-3x)^2 = 0^+$

et donc $\lim\limits_{x \to \frac{1}{3}^+} f(x) = +\infty$

$x = \dfrac{1}{3}$ est asymptote verticale.

**Limite en $+\infty$ :**

$\lim\limits_{x \to +\infty} 1 - 3x = -\infty$ donc $\lim\limits_{x \to +\infty} (1-3x)^2 = +\infty$

et donc $\lim\limits_{x \to +\infty} f(x) = 0$

$y = 0$ est asymptote horizontale en $+\infty$.

</td>
</tr>
<tr>
<td>2.</td>
<td>

**Limite en $-\dfrac{1}{2}^+$ :**

$\left.\begin{array}{l} \lim\limits_{x \to -\frac{1}{2}^+} -4 = -4 \\ \lim\limits_{\substack{x \to -\frac{1}{2}^+ \\ x \approx -0,4}} 2x + 1 = 0^+ \end{array}\right\}$ donc $\lim\limits_{x \to -\frac{1}{2}^+} g(x) = -\infty$

$x = -\dfrac{1}{2}$ est asymptote verticale.

**Limite en $+\infty$ :**

$\lim\limits_{x \to +\infty} 2x + 1 = +\infty$ donc $\lim\limits_{x \to +\infty} g(x) = 0$

$y = 0$ est asymptote horizontale en $+\infty$.

</td>
</tr>
</table>

## Correction de l'exercice 2.

Déterminer les limites des fonctions suivantes, définies sur l’intervalle donné, *on donnera les éventuelles asymptotes horizontales ou verticales* :

▶1. $f(x) = x^3 - 5x + 1$ sur $\mathbb{R}$

▶2. $g(x) = \dfrac{3x+1}{7-4x}$ sur $\left]-\infty; \dfrac{7}{4}\right[$

| | | |
|---|---|---|
| Exercice 2. | 1. | **Limite en $-\infty$ :**<br>$\left.\begin{array}{r} \lim\limits_{x\to-\infty} x^3 = -\infty \\ \lim\limits_{x\to-\infty} -5x+1 = +\infty \end{array}\right\}$ il y a donc FI par somme<br>$\forall x \in \mathbb{R}^*, \quad f(x) = x^3 - 5x + 1 = x^3\left(\dfrac{x^3}{x^3} - \dfrac{5x}{x^3} + \dfrac{1}{x^3}\right) = x^3\left(1 - \dfrac{5}{x^2} + \dfrac{1}{x^3}\right)$<br>$\left.\begin{array}{r} \lim\limits_{x\to-\infty} x^3 = -\infty \\ \lim\limits_{x\to-\infty} 1 - \dfrac{5}{x^2} + \dfrac{1}{x^3} = 1 \end{array}\right\}$ donc $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x) = -\infty$<br><br>**Limite en $+\infty$ :**<br>$\forall x \in \mathbb{R}^*, \quad f(x) = x^3\left(1 - \dfrac{5}{x^2} + \dfrac{1}{x^3}\right)$<br>$\left.\begin{array}{r} \lim\limits_{x\to+\infty} x^3 = +\infty \\ \lim\limits_{x\to+\infty} 1 - \dfrac{5}{x^2} + \dfrac{1}{x^3} = 1 \end{array}\right\}$ donc $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x) = +\infty$ |

| | | |
|---|---|---|
| | **2.** | **Limite en $-\infty$ :**<br>$\left.\begin{array}{l}\lim\limits_{x\to-\infty} 3x+1=-\infty\\ \lim\limits_{x\to-\infty} 7-4x=+\infty\end{array}\right\}$ il y a donc FI par quotient<br>$\forall x\in\mathbb{R}^*,\qquad g(x)=\frac{3x+1}{7-4x}=\frac{x\left(3+\frac{1}{x}\right)}{x\left(\frac{7}{x}-4\right)}=\frac{3+\frac{1}{x}}{\frac{7}{x}-4}$<br>$\left.\begin{array}{l}\lim\limits_{x\to-\infty} 3+\frac{1}{x}=3\\ \lim\limits_{x\to-\infty} \frac{7}{x}-4=-4\end{array}\right\}$ donc $\lim\limits_{x\to-\infty} g(x)=-\frac{3}{4}$<br>$y=-\frac{3}{4}$ est asymptote horizontale en $-\infty$.<br>**Limite en $\frac{7}{4}^-$ :**<br>$\left.\begin{array}{l}\lim\limits_{x\to\frac{7}{4}^-} 3x+1=\frac{25}{4}\\ \lim\limits_{x\to\frac{7}{4}^-} 7-4x=0^+\end{array}\right\}$ donc $\lim\limits_{x\to\frac{7}{4}^-} g(x)=+\infty$<br>$x\approx 1{,}7$<br>$x=\frac{7}{4}$ est asymptote verticale. |

## Correction de l'exercice 3.

Déterminer les limites des fonctions suivantes, définies sur l'intervalle donné, *on donnera les éventuelles asymptotes horizontales ou verticales* :

▶1. $f(x)=\dfrac{1}{\sqrt{x^2+3}}$ sur $\mathbb{R}$

▶2. $g(x)=\dfrac{5x+1}{x^2-1}$ sur $]-1;1[$

<table>
<tr><td rowspan="2">Exercice 3.</td><td>1.</td><td>

**Limite en $-\infty$ :**

$\lim\limits_{x\to-\infty} x^2+3=+\infty$ donc $\lim\limits_{x\to-\infty} \sqrt{x^2+3}=+\infty$

et donc $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x)=0$

$y=0$ est asymptote horizontale en $-\infty$.

**Limite en $+\infty$ :**

$\lim\limits_{x\to+\infty} x^2+3=+\infty$ donc $\lim\limits_{x\to+\infty} \sqrt{x^2+3}=+\infty$

et donc $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)=0$

$y=0$ est asymptote horizontale en $+\infty$.

</td></tr>
<tr><td>2.</td><td>

**Limite en $-1^+$ :**

$\left.\begin{array}{l}\lim\limits_{x\to-1^+} 5x+1=-4\\ \lim\limits_{\substack{x\to-1^+\\ x\approx-0,9}} x^2-1=0^-\end{array}\right\}$ donc $\lim\limits_{x\to-1^+} g(x)=+\infty$

$x=-1$ est asymptote verticale.

**Limite en $1^-$ :**

$\left.\begin{array}{l}\lim\limits_{x\to1^-} 5x+1=6\\ \lim\limits_{\substack{x\to1^-\\ x\approx0,9}} x^2-1=0^-\end{array}\right\}$ donc $\lim\limits_{x\to1^-} g(x)=-\infty$

$x=1$ est asymptote verticale.

</td></tr>
</table>

## Correction de l'exercice 4.

Déterminer les limites des fonctions suivantes, définies sur l'intervalle donné, *on donnera les éventuelles asymptotes horizontales ou verticales* :

▶1. $f(x)=\sqrt{x^2+3x+3}$ sur $[0;+\infty[$

▶2. $g(x)=\dfrac{3-2x}{x+7}$ sur $]-7;+\infty[$

| | | |
|---|---|---|
| Exercice 4. | 1. | **Limite en $+\infty$ :** <br> $\lim\limits_{x\to+\infty} x^2+3x+3=+\infty$ donc $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)=+\infty$ |

| | | |
|---|---|---|
| | 2. | **Limite en $-7^+$ :** <br> $\left.\begin{array}{l}\lim\limits_{x\to-7^+} 3-2x=17 \\ \lim\limits_{\substack{x\to-7^+ \\ x\approx-6{,}9}} x+7=0^+\end{array}\right\}$ donc $\lim\limits_{x\to-7^+} g(x)=+\infty$ <br> $x=-7$ est asymptote verticale. <br> **Limite en $+\infty$ :** <br> $\left.\begin{array}{l}\lim\limits_{x\to+\infty} 3-2x=-\infty \\ \lim\limits_{x\to+\infty} x+7=+\infty\end{array}\right\}$ il y a donc FI par quotient <br> $\forall x\in\mathbb{R}^*,\quad g(x)=\dfrac{3-2x}{x+7}=\dfrac{x\left(\frac{3}{x}-2\right)}{x\left(1+\frac{7}{x}\right)}=\dfrac{\frac{3}{x}-2}{1+\frac{7}{x}}$ <br> $\left.\begin{array}{l}\lim\limits_{x\to+\infty} \frac{3}{x}-2=-2 \\ \lim\limits_{x\to+\infty} 1+\frac{7}{x}=1\end{array}\right\}$ donc $\lim\limits_{x\to+\infty} g(x)=-2$ <br> $y=-2$ est asymptote horizontale en $+\infty$ |

## Correction de l'exercice 5.

Déterminer les limites des fonctions suivantes, définies sur l'intervalle donné, *on donnera les éventuelles asymptotes horizontales ou verticales* :

▶1. $f(x)=x\,(e^x-x)$ sur $\mathbb{R}$

▶2. $g(x)=\frac{e^x+3}{x-1}$ sur $]1;+\infty[$

**Exercice 5.**

**1.**

**Limite en $-\infty$ :**

$$\left.\begin{array}{l} \lim\limits_{x\to-\infty} x = -\infty \\ \lim\limits_{x\to-\infty} e^x = 0 \text{ donc } \lim\limits_{x\to-\infty} e^x - x = +\infty \end{array}\right\} \text{donc, par produit,}$$

$$\lim_{x\to+\infty} f(x) = -\infty$$

**Limite en $+\infty$ :**

$$\left.\begin{array}{l} \lim\limits_{x\to+\infty} e^x = +\infty \\ \lim\limits_{x\to+\infty} x = +\infty \end{array}\right\} \quad \text{il y a donc FI par soustraction}$$

$$\forall x \in \mathbb{R}^*, f(x) = x^2\left(\frac{e^x}{x} - 1\right)$$

$$\left.\begin{array}{l} \lim\limits_{x\to+\infty} x^2 = +\infty \\ \lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{e^x}{x} = +\infty \text{ donc } \lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{e^x}{x} - 1 = +\infty \end{array}\right\} \text{donc, par produit,}$$

$$\lim_{x\to+\infty} f(x) = +\infty$$

**2.**

**Limite en $1^+$ :**

$$\left.\begin{array}{l} \lim\limits_{x\to1^+} e^x + 3 = e + 3 \\ \lim\limits_{\substack{x\to1^+ \\ x\approx1,1}} x - 1 = 0^+ \end{array}\right\} \quad \text{donc, par quotient, } \lim_{x\to1^+} g(x) = +\infty$$

$x = 1$ est asymptote verticale.

**Limite en $+\infty$ :**

$$\left.\begin{array}{l} \lim\limits_{x\to+\infty} e^x + 3 = +\infty \\ \lim\limits_{x\to+\infty} x - 1 = +\infty \end{array}\right\} \quad \text{il y a donc FI par quotient}$$

$$\forall x \in \mathbb{R}^*, \qquad g(x) = \frac{e^x + 3}{x - 1} = \frac{x\left(\frac{e^x}{x} + \frac{3}{x}\right)}{x\left(1 - \frac{1}{x}\right)} = \frac{\frac{e^x}{x} + \frac{3}{x}}{1 - \frac{1}{x}}$$

$$\left.\begin{array}{l} \lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{e^x}{x} + \dfrac{3}{x} = +\infty \\ \lim\limits_{x\to+\infty} 1 - \dfrac{1}{x} = 1 \end{array}\right\} \quad \text{donc} \quad \lim_{x\to+\infty} g(x) = +\infty$$

## Correction de l'exercice 6.

Déterminer les limites des fonctions suivantes, définies sur l'intervalle donné, *on donnera les éventuelles asymptotes horizontales ou verticales* :

▶1. $f(x) = 5x^3 - xe^x$ sur $\mathbb{R}$

▶2. $g(x) = \frac{e^x-2}{e^x+1}$ sur $\mathbb{R}$

<table>
<tr>
<td rowspan="2">Exercice 6.</td>
<td>1.</td>
<td>
Limite en $-\infty$ :<br>
$$\left.\begin{array}{l}\lim\limits_{x\to-\infty} 5x^3 = -\infty \\ \lim\limits_{x\to-\infty} -xe^x = 0\end{array}\right\}\text{donc, par somme, } \lim_{x\to-\infty} f(x) = -\infty$$
Limite en $+\infty$ :<br>
$$\left.\begin{array}{l}\lim\limits_{x\to+\infty} 5x^3 = +\infty \\ \lim\limits_{x\to+\infty} xe^x = +\infty\end{array}\right\}\quad \text{il y a donc FI par soustraction}$$
$$\forall x \in \mathbb{R}^*, f(x) = 5x^3 - xe^x = x^3\left(5 - \frac{e^x}{x^2}\right)$$
$$\left.\begin{array}{r}\lim\limits_{x\to+\infty} x^3 = +\infty \\ \lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{e^x}{x} = +\infty \text{ donc } \lim\limits_{x\to+\infty} 5 - \dfrac{e^x}{x^2} = -\infty\end{array}\right\}\text{donc, par produit,}$$
$$\lim_{x\to+\infty} f(x) = -\infty$$
</td>
</tr>
<tr>
<td>2.</td>
<td>
Limite en $-\infty$ :<br>
$$\left.\begin{array}{l}\lim\limits_{x\to-\infty} e^x - 2 = -2 \\ \lim\limits_{x\to-\infty} e^x + 1 = 1\end{array}\right\}\text{donc, par quotient, } \lim_{x\to-\infty} g(x) = -2$$
$y = -2$ est asymptote horizontale en $-\infty$<br>
Limite en $+\infty$ :<br>
$$\left.\begin{array}{l}\lim\limits_{x\to+\infty} e^x - 2 = +\infty \\ \lim\limits_{x\to+\infty} e^x + 1 = +\infty\end{array}\right\}\quad \text{il y a donc FI par quotient}$$
$$\forall x \in \mathbb{R}, \qquad g(x) = \frac{e^x - 2}{e^x + 1} = \frac{e^x(1 - 2e^{-x})}{e^x(1 + e^{-x})} = \frac{1 - 2e^{-x}}{1 + e^{-x}}$$
$$\left.\begin{array}{l}\lim\limits_{x\to+\infty} 1 - 2e^{-x} = 1 \\ \lim\limits_{x\to+\infty} 1 + e^{-x} = 1\end{array}\right\}\text{donc, par quotient, } \lim_{x\to+\infty} g(x) = 1$$
</td>
</tr>
</table>