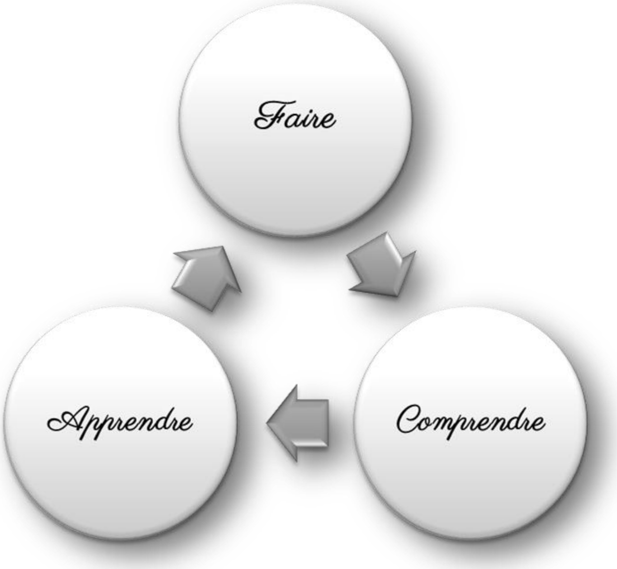
# Terminale Spécialité Mathématiques
## Tâche n° 1 3
## Etudier la convexité de la courbe d’une fontion




## Table des matières

# Tâche n° $\boxed{1}$ $\boxed{3}$
# Etudier la convexité de la courbe d'une fontion

## Enoncé des exercices

### Exercice 1.

Etudier la convexité des fonctions définies ci-dessous :

▶1. $f(x) = \dfrac{4x-3}{7-3x}$ sur $\left]-\infty; \dfrac{7}{3}\right[ \cup \left]\dfrac{7}{3}; +\infty\right[$

▶2. $g(x) = x\, e^{x}$ sur $\mathbb{R}$

### Exercice 2.

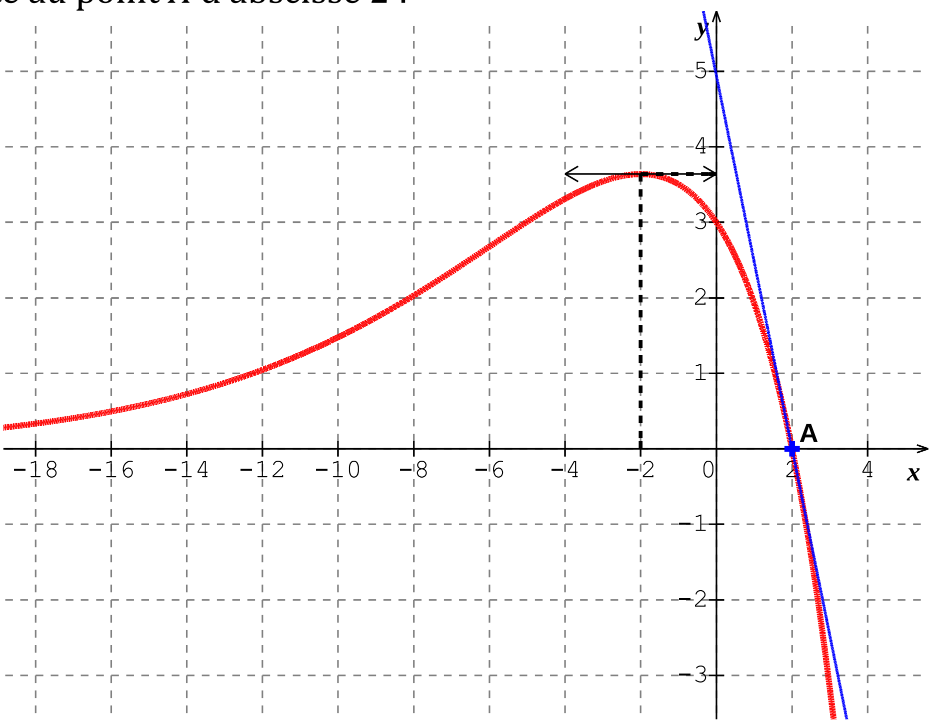
Etudier la convexité des fonctions définies ci-dessous :

▶1. $f(x) = (2x+1)\sqrt{x}$ sur $[0; +\infty[$

▶2. $g(x) = \dfrac{e^{x}}{x}$ sur $\mathbb{R}^{*}$

### Exercice 3.

On a tracé ci-dessous la courbe représentative $C_f$ d'une fonction $f$ définie sur $\mathbb{R}$ ainsi que sa tangente au point $A$ d'abscisse 2 :



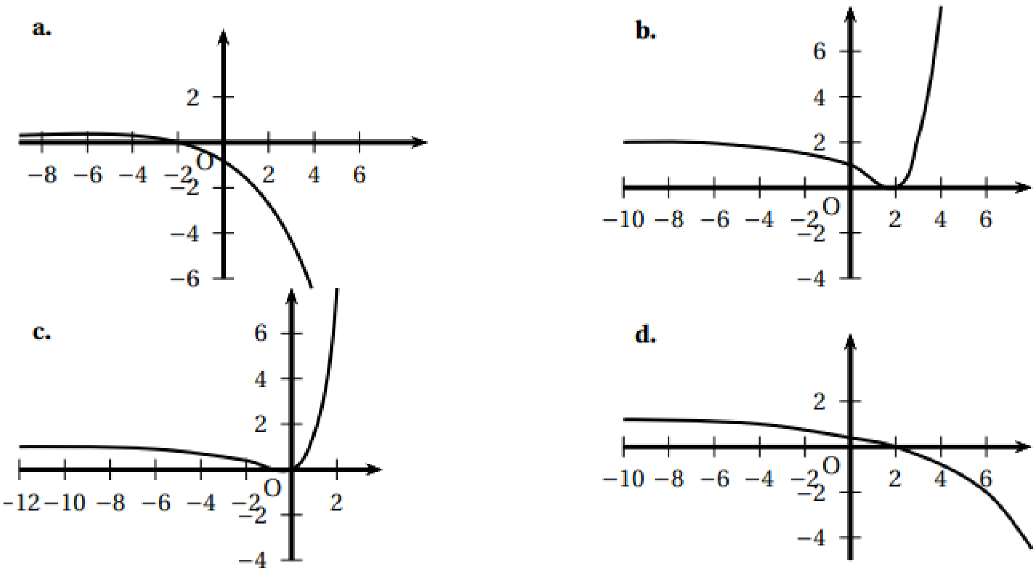

▶1. QCM. Quelle est l'équation de la tangente à $C_f$ en $A$ ?

| | | | |
|---|---|---|---|
| **A** | $y = -1{,}5\sqrt{e}\,x - 3\sqrt{e}$ | **B** | $y = 1{,}5\sqrt{e}\,x - 3\sqrt{e}$ |
| **C** | $y = -1{,}5\sqrt{e}\,x + 3\sqrt{e}$ | **D** | $y = 1{,}5\sqrt{e}\,x + 3\sqrt{e}$ |

▶2. QCM. La fonction $f$ est :

| | | | |
|---|---|---|---|
| **A** | concave sur $]-\infty; 0]$ | **B** | concave sur $[0; 2]$ |
| **C** | convexe sur $]-\infty; 0]$ | **D** | convexe sur $[0; 2]$ |

▶3. QCM. Parmi les 4 courbes représentées ci-dessous, laquelle représente la fonction dérivée de la fonction $f$ ?




▶4. La fonction $f$ est de la forme $f(x) = (ax + b)e^{cx}$ pour tout $x \in \mathbb{R}$. En utilisant le point $A$, la tangente horizontale en $-2$ ainsi que le point $(0; 3)$ qui appartient à la courbe $C_f$, déterminer les constantes $a$, $b$ et $c$.

# Tâche n° $\boxed{1}$ $\boxed{3}$
# Etudier la convexité de la courbe d'une fontion
## Correction des exercices

### Correction de l'exercice 1.

Etudier la convexité des fonctions définies ci-dessous :

▶1. $f(x) = \dfrac{4x-3}{7-3x}$ sur $\left]-\infty;\dfrac{7}{3}\right[ \cup \left]\dfrac{7}{3};+\infty\right[$

▶2. $g(x) = x\,e^{x}$ sur $\mathbb{R}$

**Exercice 1.**

**1.**

$f$ et $f'$ sont dérivables sur $\left]-\infty;\frac{7}{3}\right[ \cup \left]\frac{7}{3};+\infty\right[$

$\forall x \in \left]-\infty;\dfrac{7}{3}\right[ \cup \left]\dfrac{7}{3};+\infty\right[, \qquad f'(x) = \dfrac{4(7-3x)-(4x-3)\times(-3)}{(7-3x)^2}$

$$f'(x) = \frac{28-12x+12x-9}{(7-3x)^2} = \frac{19}{(7-3x)^2}$$

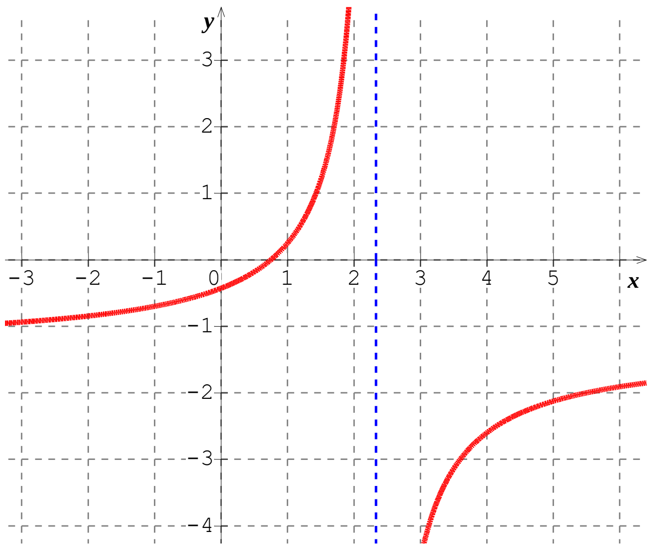
$$f''(x) = \frac{0-19\times 2\times(7-3x)\times(-3)}{(7-3x)^4} = \frac{114\,(7-3x)}{(7-3x)^4} = \frac{114}{(7-3x)^3}$$

$$f''(x) > 0 \Leftrightarrow 7-3x > 0$$

$$\Leftrightarrow -3x > -7$$

$$\Leftrightarrow x < \frac{7}{3}$$

| $x$ | $-\infty$ | $\frac{7}{3}$ | $+\infty$ |
| --- | --- | --- | --- |
| $f''(x)$ | $+$ | \|\| | $-$ |
| $f$ | $convexe$ | \|\| | $concave$ |



**2.**

$g$ est dérivable sur $\mathbb{R}$

$\forall x \in \mathbb{R},\quad g'(x) = 1 \times\ e^x + x\, e^x = (1 + x\,)e^x$

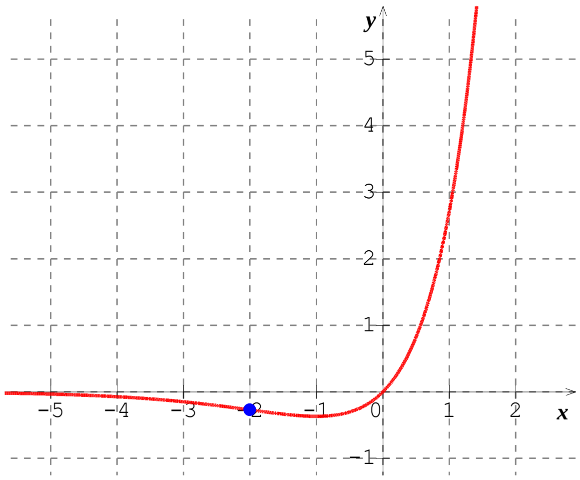
$g'$ est dérivable sur $\mathbb{R}$

$\forall x \in \mathbb{R},\quad g''(x) = 1 \times e^x + (1 + x\,)e^x = (1 + 1 + x\,)e^x = (2 + x\,)e^x$

$$g''(x) > 0 \Leftrightarrow 2 + x > 0 \ \text{ car } e^x > 0$$

$$\Leftrightarrow x > -2$$

| $x$ | $-\infty$ | $-2$ | $+\infty$ |
|---|---|---|---|
| $g''(x)$ | $-$ | $0$ | $+$ |
| $g$ | $concave$ | | $convexe$ |




## Correction de l'exercice 2.

Etudier la convexité des fonctions définies ci-dessous :

▶1. $f(x) = (2x + 1)\sqrt{x}$ sur $[0; +\infty[$

▶2. $g(x) = \dfrac{e^x}{x}$ sur $\mathbb{R}^*$

**Exercice 2.**

**1.**

$f$ et $f'$ sont dérivables sur $]0;+\infty[$

$\forall x \in ]0;+\infty[, \qquad f'(x) = 2 \times \sqrt{x} + (2x+1) \times \dfrac{1}{2\sqrt{x}}$

$$f'(x) = 2\sqrt{x} + \frac{2x+1}{2\sqrt{x}} = \frac{2\sqrt{x} \times 2\sqrt{x} + 2x + 1}{2\sqrt{x}} = \frac{4x + 2x + 1}{2\sqrt{x}} = \frac{6x+1}{2\sqrt{x}}$$

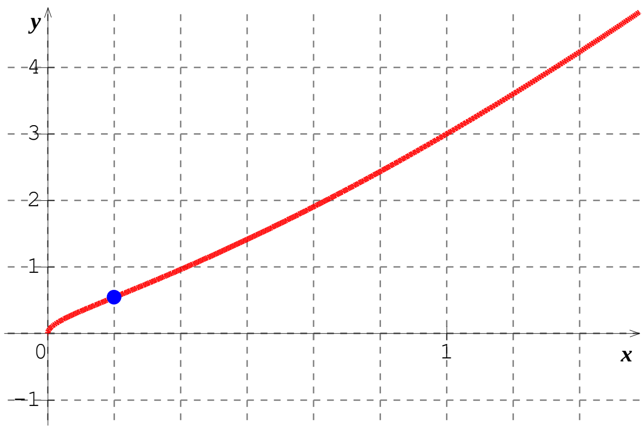
$$f''(x) = \frac{6 \times 2\sqrt{x} - (6x+1) \times 2 \times \frac{1}{2\sqrt{x}}}{\left(2\sqrt{x}\right)^2} = \frac{12x - (6x+1)}{\sqrt{x}} \times \frac{1}{\left(2\sqrt{x}\right)^2}$$

$$f''(x) = \frac{12x - 6x - 1}{\sqrt{x}} \times \frac{1}{4x} = \frac{6x-1}{4x\sqrt{x}}$$

$$f''(x) > 0 \Leftrightarrow 6x - 1 > 0 \text{ car } x > 0$$

$$\Leftrightarrow 6x > 1 \Leftrightarrow x > \frac{1}{6}$$

| $x$ | $0$ | $\frac{1}{6}$ | $+\infty$ |
|---|---|---|---|
| $f''(x)$ | $-$ | $0$ | $+$ |
| $f$ | $concave$ | | $convexe$ |



$g$ est dérivable sur $\mathbb{R}^*$

$$\forall x \in \mathbb{R}^*, \quad g'(x) = \frac{e^x \times x - e^x \times 1}{x^2} = \frac{(x-1)e^x}{x^2}$$

$g'$ est dérivable sur $\mathbb{R}^*$

$$\forall x \in \mathbb{R}^*, \quad g'(x) = \frac{(x-1)e^x}{x^2} = \frac{u}{v}$$

$$u = (x-1)e^x \quad u' = 1 \times e^x + (x-1)e^x = (1 + x - 1)e^x = xe^x$$
$$v = x^2 \qquad v' = 2x$$

$$g''(x) = \frac{xe^x \times x^2 - (x-1)e^x \times 2x}{x^4}$$

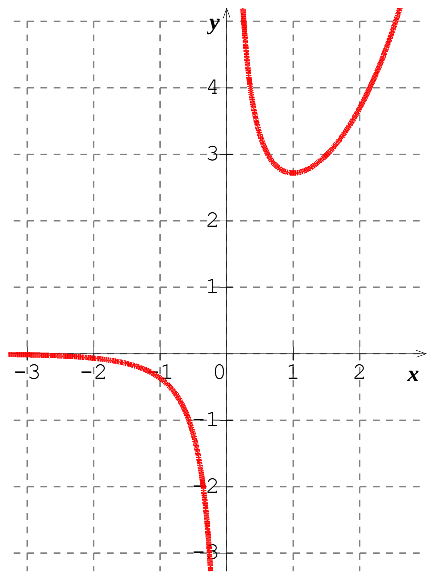
$$g''(x) = \frac{x(x^2 - 2x + 2)e^x}{x^4} = \frac{(x^2 - 2x + 2)e^x}{x^3}$$

Signe de $x^2 - 2x + 2$ : $\Delta = 4 - 4 \times 2 = -4 < 0$

Donc $x^2 - 2x + 2 > 0$ pour tout $x$

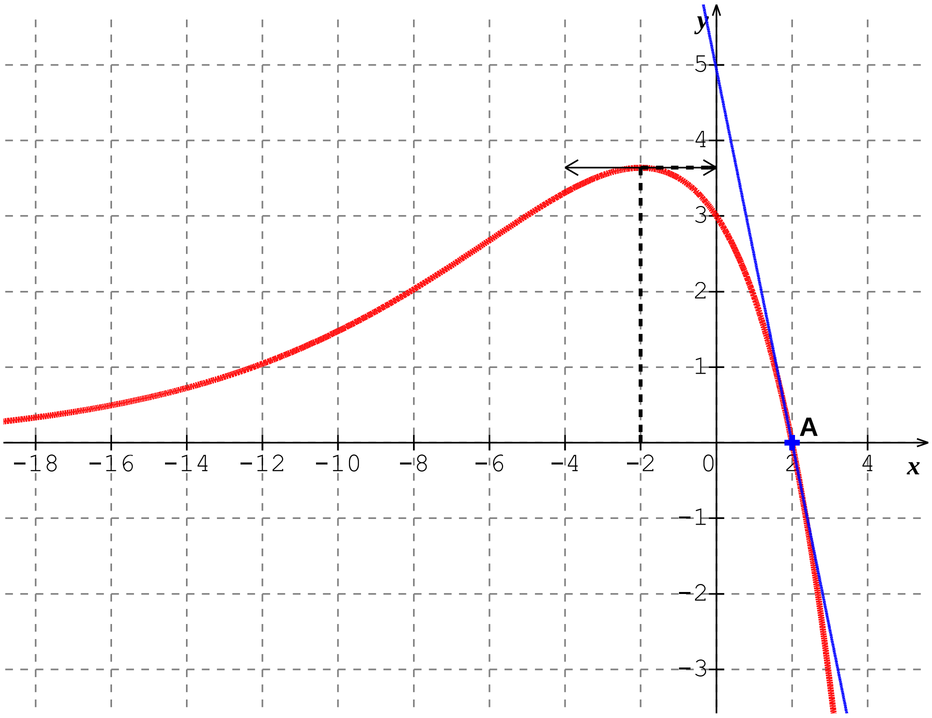
**2.**

| $x$ | $-\infty$ | $0$ | $+\infty$ |
|---|---|---|---|
| $x$ | $-$ | $0$ | $+$ |
| $(x^2-2x+2)e^x$ | $+$ | | $+$ |
| $g''(x)$ | $-$ | ‖ | $+$ |
| $g$ | *concave* | ‖ | *convexe* |




## Correction de l'exercice 3.

On a tracé ci-dessous la courbe représentative $C_f$ d'une fonction $f$ définie sur $\mathbb{R}$ ainsi que sa tangente au point $A$ d'abscisse 2 :





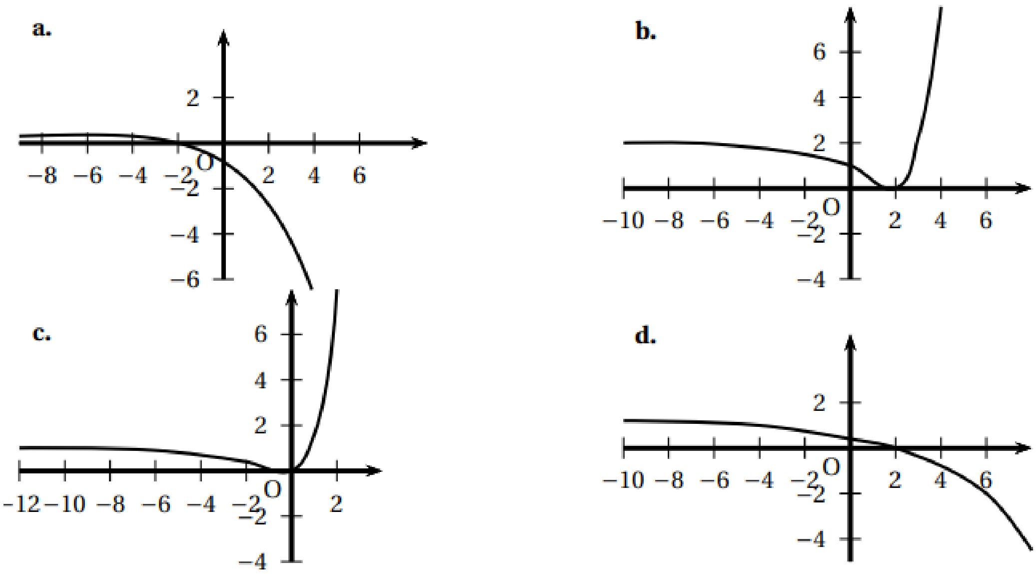
▶1. QCM. Quelle est l'équation de la tangente à $C_f$ en $A$ ?

| | | | |
|---|---|---|---|
| **A** | $y = -1{,}5\sqrt{e}\,x - 3\sqrt{e}$ | **B** | $y = 1{,}5\sqrt{e}\,x - 3\sqrt{e}$ |
| **C** | $y = -1{,}5\sqrt{e}\,x + 3\sqrt{e}$ | **D** | $y = 1{,}5\sqrt{e}\,x + 3\sqrt{e}$ |

▶2. QCM. La fonction $f$ est :

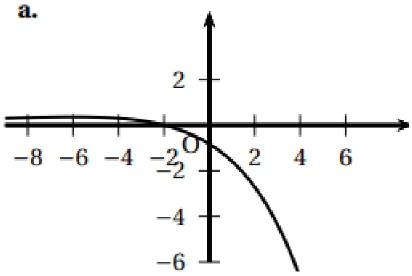
| | | | |
|---|---|---|---|
| **A** | concave sur $]-\infty; 0]$ | **B** | concave sur $[0; 2]$ |
| **C** | convexe sur $]-\infty; 0]$ | **D** | convexe sur $[0; 2]$ |

▶3. QCM. Parmi les 4 courbes représentées ci-dessous, laquelle représente la fonction dérivée de la fonction $f$ ?





▶4. La fonction $f$ est de la forme $f(x) = (ax + b)e^{cx}$ pour tout $x \in \mathbb{R}$. En utilisant le point $A$, la tangente horizontale en $-2$ ainsi que le point $(0; 3)$ qui appartient à la courbe $C_f$, déterminer les constantes $a$, $b$ et $c$.

| | | |
|---|---|---|
| **Exercice 3.** | **1.** | La tangente est décroissante et passe par le point de coordonnées $(2; 0)$. La seule équation de tangente possible est donc<br>**C** $y = -1{,}5\sqrt{e}\ x + 3\sqrt{e}$ |
| | **2.** | Visuellement, la fonction $f$ est convexe puis concave.<br>La seule bonne réponse est donc<br>**B** concave sur $[0; 2]$ |
| | **3.** | La fonction $f$ est croissante sur $]-\infty; -2]$ puis croissante sur $[-2; +\infty[$.<br>La seule dérivée possible est donc<br>**a.**<br><br> |
| | **4.** | $f(x) = (ax + b)e^{cx}$<br><br>$f(2) = 0 = (2a + b)e^{2c}$<br>$\Leftrightarrow 2a + b = 0$<br>$\Leftrightarrow b = -2a$<br><br>$f(0) = 3 = (0 + b)e^{0}$<br>$\Leftrightarrow 3 = b$<br>et donc $b = 3 = -2a$<br>$\Leftrightarrow a = \frac{-3}{2}$<br><br>$f(x) = (-1{,}5x + 3)e^{cx}$<br>$f'(-2) = 0$<br><br>$f'(x) = -1{,}5\ e^{cx} + (-1{,}5x + 3) \times c \times e^{cx}$<br>$f'(x) = (-1{,}5 - 1{,}5cx + 3c)e^{cx}$<br><br>$f'(-2) = (-1{,}5c \times -2 + 3c - 1{,}5)e^{-2c} = 0$<br>$f'(-2) = (6c - 1{,}5)e^{-2c} = 0$<br><br>$\Leftrightarrow 6c - 1{,}5 = 0$<br>$\Leftrightarrow c = \frac{1{,}5}{6} = 0{,}25$<br>$f(x) = (-1{,}5x + 3)e^{0{,}25x}$ |