Terminale Spécialité Mathématiques

Tâche n° 1 8

Fonction logarithme népérien

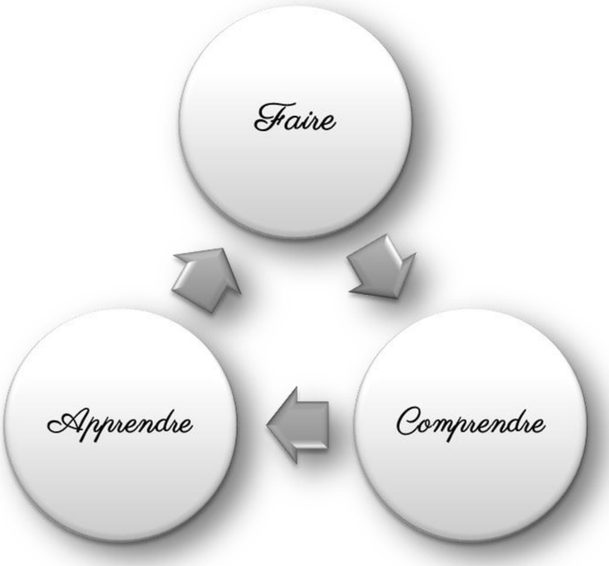


Table des matières

Enoncé des exercices 2

Exercice 1. 2

Exercice 2. 2

Exercice 3. 2

Exercice 4. 2

Exercice 5. 2

Exercice 6. 2

Correction des exercices 3

Correction de l'exercice 1 3

Correction de l'exercice 2 5

Correction de l'exercice 3 7

Correction de l'exercice 4 9

Correction de l'exercice 5 12

Correction de l'exercice 6 15

Tâche n° 1 8
Fonction logarithme népérien
Enoncé des exercices

Exercice 1.

Soit la fonction définie sur $]0;+\infty[$ par $f(x)=-x+1+2\ln(x)$.

▶ 1. Etudier les limites de la fonction f aux bornes de son ensemble de définition.

▶ 2. Dresser, en justifiant, le tableau de variations de la fonction f.

▶ 3. Etudier, en justifiant, la convexité de la fonction f.

Exercice 2.

Soit la fonction définie sur $]0;+\infty[$ par $f(x)=-x^2+9x+5\ln(x)$.

▶ 1. Etudier les limites de la fonction f aux bornes de son ensemble de définition.

▶ 2. Dresser, en justifiant, le tableau de variations de la fonction f.

▶ 3. Déterminer l'équation de la tangente à la courbe en 1.

Exercice 3.

Soit la fonction définie sur $]0;+\infty[$ par $f(x)=x^2-7x+4+5\ln(x)$.

▶ 1. Etudier les limites de la fonction f aux bornes de son ensemble de définition.

▶ 2. Dresser, en justifiant, le tableau de variations de la fonction f.

▶ 3. Déterminer l'équation de la tangente à la courbe en e.

▶ 4. Etudier, en justifiant, la convexité de la fonction f.

Exercice 4.

Soit la fonction définie sur $]0;+\infty[$ par $f(x)=-6x^2+10x-2\ln(x)$.

▶ 1. Etudier les limites de la fonction f aux bornes de son ensemble de définition.

▶ 2. Dresser, en justifiant, le tableau de variations de la fonction f.

▶ 3. Déterminer l'équation de la tangente à la courbe en 1.

▶ 4. Etudier, en justifiant, la convexité de la fonction f.

Exercice 5.

Partie A : On étudie la fonction définie sur $]0;+\infty[$ par $g(x)=4x-4+2\ln(x)$.

▶ 1. Dresser, en justifiant, le tableau de variations de la fonction g.

▶ 2. Calculer $g(1)$. En déduire le signe de la fonction g.

Partie B : Soit la fonction définie sur $]0;+\infty[$ par $f(x)=2x^2-6x+2x\ln(x)$.

▶ 1. Etudier les limites de la fonction f aux bornes de son ensemble de définition.

▶ 2. Dresser, en justifiant, le tableau de variations de la fonction f.

▶ 3. Déterminer l'équation de la tangente à la courbe en e.

▶ 4. La courbe de la fonction f admet-elle un point d'inflexion ? Justifier.

Exercice 6.

Soit $k\in\mathbb{N}^*$, on définit la fonction f_k sur $]0;+\infty[$ par $f_k(x)=x-\frac{k\ln(x)}{x}$.

Pour tout $k\in\mathbb{N}^*$, la courbe de f_k admet un point d'inflexion, on appelle u_k l'ordonnée de ce point d'inflexion. La suite (u_k) est-elle convergente ?

Tâche n° 1 8
Fonction logarithme népérien
Correction des exercices

Correction de l'exercice 1.

Soit la fonction définie sur $]0;+\infty[$ par $f(x) = -x + 1 + 2\ln(x)$.

▶ 1. Etudier les limites de la fonction f aux bornes de son ensemble de définition.

▶ 2. Dresser, en justifiant, le tableau de variations de la fonction f.

▶ 3. Etudier, en justifiant, la convexité de la fonction f.

Exercice 1.

1.

$$\left.\begin{array}{l}\lim\limits_{x\to 0^+} -x+1 = 1\\ \lim\limits_{x\to 0^+} 2\ln(x) = -\infty\end{array}\right\}\text{donc, par somme, } \lim_{x\to 0^+} f(x) = -\infty$$

$x = 0$ est donc une asymptote verticale.

$$\left.\begin{array}{l}\lim\limits_{x\to +\infty} -x+1 = -\infty\\ \lim\limits_{x\to +\infty} 2\ln(x) = +\infty\end{array}\right\}\text{FI par somme}$$

$$\forall x \in]0;+\infty[, f(x) = x\left(-1 + \frac{1}{x} + 2 \times \frac{\ln(x)}{x}\right)$$

or $\lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{\ln(x)}{x} = 0$

$$\left.\begin{array}{l}\lim\limits_{x\to +\infty} x = +\infty\\ \lim\limits_{x\to +\infty} -1 + \dfrac{1}{x} + 2\times\dfrac{\ln(x)}{x} = -1\end{array}\right\}\text{donc, par produit, } \lim_{x\to +\infty} f(x) = -\infty$$

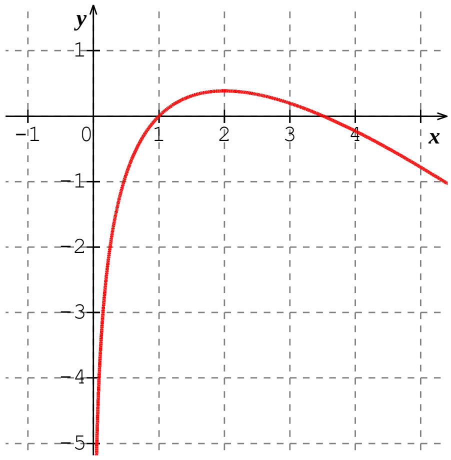
2.

f est dérivable sur $]0;+\infty[$

$$\forall x \in]0;+\infty[, f'(x) = -1 + \frac{2}{x} = \frac{-x+2}{x}$$

$$\begin{aligned} f'(x) > 0 &\Leftrightarrow \frac{-x+2}{x} > 0\\ &\Leftrightarrow -x+2 > 0 \ \text{ car } x > 0\\ &\Leftrightarrow 2 > x\end{aligned}$$

x	0		2		$+\infty$
$f'(x)$		$+$	0	$-$	
$f(x)$	$-\infty$	↗	$2ln(2)-1$	↘	$-\infty$

	3.	f' est dérivable sur $]0;+\infty[$ $\forall x \in]0;+\infty[, f'(x) = \dfrac{-x+2}{x}$ $f''(x) = \dfrac{-x-(-x+2)}{x^2} = \dfrac{-x+x-2}{x^2} = -\dfrac{2}{x^2}$ $\forall x \in]0;+\infty[, f''(x) = -\dfrac{2}{x^2} < 0$ La courbe de la fonction f est donc concave sur $]0;+\infty[$. 

Correction de l'exercice 2.

Soit la fonction définie sur $]0;+\infty[$ par $f(x) = -x^2 + 9x + 5\ln(x)$.

▶1. Etudier les limites de la fonction f aux bornes de son ensemble de définition.

▶2. Dresser, en justifiant, le tableau de variations de la fonction f.

▶3. Déterminer l'équation de la tangente à la courbe en 1.

Exercice 2.

1.

$$\left.\begin{array}{r}\lim\limits_{x\to 0^+} -x^2+9x=0\\ \lim\limits_{x\to 0^+} 5\ln(x)=-\infty\end{array}\right\}\text{donc, par somme, } \lim_{x\to 0^+} f(x) = -\infty$$

$x = 0$ est donc une asymptote verticale.

$$\left.\begin{array}{r}\lim\limits_{x\to +\infty} -x^2=-\infty\\ \lim\limits_{x\to +\infty} 9x+5\ln(x)=+\infty\end{array}\right\}\text{FI par somme}$$

$$\forall x \in\,]0;+\infty[,\, f(x) = x^2\left(-1+\frac{9}{x}+5\times\frac{\ln(x)}{x^2}\right)$$

or $\lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{\ln(x)}{x^2} = 0$

$$\left.\begin{array}{r}\lim\limits_{x\to +\infty} x^2=+\infty\\ \lim\limits_{x\to +\infty} -1+\dfrac{9}{x}+5\times\dfrac{\ln(x)}{x^2}=-1\end{array}\right\}\text{donc, par produit, } \lim_{x\to +\infty} f(x) = -\infty$$

2.

f est dérivable sur $]0;+\infty[$

$\forall x \in\,]0;+\infty[,\, f(x) = -x^2+9x+5\ln(x)$

$$f'(x) = -2x+9+\frac{5}{x} = \frac{-2x^2+9x+5}{x}$$

$$f'(x) > 0 \Leftrightarrow -2x^2+9x+5 > 0 \text{ car } x > 0$$

$$\Delta = 81-4\times(-10) = 121 > 0$$

$$x_1 = \frac{-9-\sqrt{121}}{-4} = 5 \text{ et } x_1 = \frac{-9+\sqrt{121}}{-4} = -\frac{1}{2}$$

La parabole est tournée vers le bas car $a = -2 < 0$

x	$-\infty$		$\frac{-1}{2}$		0		5		$+\infty$
$-2x^2+9x+5$		//////	0	//////		$+$	0	$-$	

J'en déduis que :

x	0		5		$+\infty$
$f'(x)$		$+$	0	$-$	
$f(x)$	$-\infty$	$\nearrow$	$20+5ln(5)$	$\searrow$	$-\infty$

$f(5) = 20+5\ln(5)$

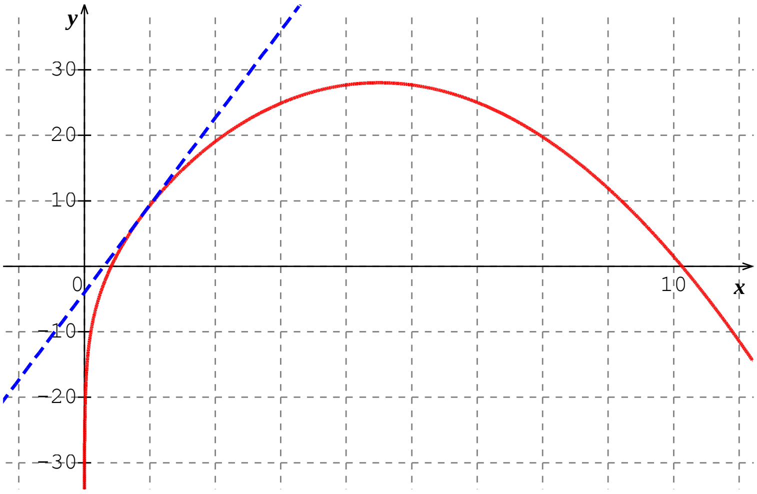
<table>
<tr>
<td></td>
<td>3.</td>
<td>

$f(1) = -1 + 9 + 5\ln(1) = 8$

$f'(1) = \dfrac{-2+9+5}{1} = 12$

$y = 12(x-1) + 8 = 12x - 12 + 8 = 12x - 4$

L’équation de la tangente en 1 est $y = 12x - 4$.



</td>
</tr>
</table>

Correction de l'exercice 3.

Soit la fonction définie sur $]0;+\infty[$ par $f(x)=x^2-7x+4+5\ln(x)$.

▶ 1. Etudier les limites de la fonction f aux bornes de son ensemble de définition.

▶ 2. Dresser, en justifiant, le tableau de variations de la fonction f.

▶ 3. Déterminer l'équation de la tangente à la courbe en e.

▶ 4. Etudier, en justifiant, la convexité de la fonction f.

Exercice 3.

1.

$$\left.\begin{array}{r}\lim\limits_{x\to 0^+} x^2-7x+4=4\\ \lim\limits_{x\to 0^+} 5\ln(x)=-\infty\end{array}\right\}\text{donc, par somme, } \lim\limits_{x\to 0^+} f(x)=-\infty$$

$x=0$ est donc une asymptote verticale.

$$\left.\begin{array}{r}\lim\limits_{x\to +\infty} -7x=-\infty\\ \lim\limits_{x\to +\infty} x^2+4+5\ln(x)=+\infty\end{array}\right\}\text{FI par somme}$$

$\forall x\in\,]0;+\infty[,\ f(x)=x^2\left(1-\dfrac{7}{x}+\dfrac{4}{x^2}+5\times\dfrac{\ln(x)}{x^2}\right)$

or $\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{\ln(x)}{x^2}=0$

$$\left.\begin{array}{r}\lim\limits_{x\to +\infty} x^2=+\infty\\ \lim\limits_{x\to +\infty} 1-\dfrac{7}{x}+\dfrac{4}{x^2}+5\times\dfrac{\ln(x)}{x^2}=1\end{array}\right\}\text{donc, par produit, } \lim\limits_{x\to +\infty} f(x)=+\infty$$

2.

f est dérivable sur $]0;+\infty[$

$\forall x\in\,]0;+\infty[,\ f(x)=x^2-7x+4+5\ln(x)$

$$f'(x)=2x-7+\frac{5}{x}=\frac{2x^2-7x+5}{x}$$

$$f'(x)>0\Leftrightarrow 2x^2-7x+5>0 \text{ car } x>0$$

$$\Delta=49-4\times 10=9>0$$

$$x_1=\frac{7-\sqrt{9}}{4}=1 \text{ et } x_2=\frac{7+\sqrt{9}}{4}=\frac{5}{2}$$

La parabole est tournée vers le haut car $a=2>0$

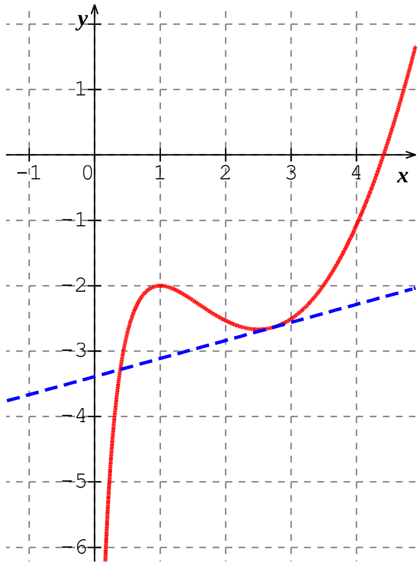
x	$-\infty$	0		1		$\frac{5}{2}$		$+\infty$
$2x^2-7x+5$	////	‖	$+$	0	$-$	0	$+$	

J'en déduis que :

x	0		1		$\frac{5}{2}$		$+\infty$
$f'(x)$	‖	$+$	0	$-$	0	$+$	
$f(x)$	‖ $-\infty$	↗	-2	↘	$\frac{-29}{4}+5\,ln(\frac{5}{2})$	↗	$+\infty$

$$f(1)=1-7+4+5\ln(1)=-2$$

$$f\left(\frac{5}{2}\right)=\frac{25}{4}-\frac{35}{2}+4+5\ln\left(\frac{5}{2}\right)=\frac{-29}{4}+5\ln\left(\frac{5}{2}\right)$$

	3.	$f(e) = e^2 - 7e + 4 + 5\ln(e) = e^2 - 7e + 9$ $f'(e) = \dfrac{2e^2 - 7e + 5}{e}$ $y = \dfrac{2e^2 - 7e + 5}{e}(x - e) + e^2 - 7e + 9$ $= \dfrac{2e^2 - 7e + 5}{e}x - 2e^2 + 7e - 5 + e^2 - 7e + 9$ $y = \dfrac{2e^2 - 7e + 5}{e}x - e^2 + 4$ 
	4.	f' est dérivable sur $]0;+\infty[$ $\forall x \in]0;+\infty[, f'(x) = \dfrac{2x^2 - 7x + 5}{x}$ $f''(x) = \dfrac{(4x - 7)x - (2x^2 - 7x + 5)}{x^2}$ $f''(x) = \dfrac{4x^2 - 7x - 2x^2 + 7x - 5}{x^2} = \dfrac{2x^2 - 5}{x^2}$ $f''(x) > 0 \Leftrightarrow 2x^2 - 5 > 0 \text{ car } x^2 > 0$ $\Leftrightarrow x^2 > \dfrac{5}{2}$ $\Leftrightarrow x > \sqrt{\dfrac{5}{2}} \text{ ou } \underbrace{x < -\sqrt{\dfrac{5}{2}}}_{\text{exclu}}$ $\Leftrightarrow x > \dfrac{\sqrt{10}}{2}$ <table><tr><td>x</td><td>0 $\frac{\sqrt{10}}{2}$ $+\infty$</td></tr><tr><td>$f''(x)$</td><td>$-$ 0 $+$</td></tr><tr><td>f</td><td>$concave$ | $convexe$</td></tr></table>

Correction de l'exercice 4.

Soit la fonction définie sur $]0;+\infty[$ par $f(x)=-6x^2+10x-2\ln(x)$.

▶1. Etudier les limites de la fonction f aux bornes de son ensemble de définition.

▶2. Dresser, en justifiant, le tableau de variations de la fonction f.

▶3. Déterminer l'équation de la tangente à la courbe en 1.

▶4. Etudier, en justifiant, la convexité de la fonction f.

Exercice 4.	**1.**	$\left.\begin{array}{l}\lim\limits_{x\to 0^+} -6x^2+10x=0\\ \lim\limits_{x\to 0^+} -2\ln(x)=+\infty\end{array}\right\}$ donc, par somme, $\lim\limits_{x\to 0^+} f(x)=+\infty$ $x=0$ est donc une asymptote verticale. $\left.\begin{array}{r}\lim\limits_{x\to+\infty} 10x=-\infty\\ \lim\limits_{x\to+\infty} -6x^2-2\ln(x)=-\infty\end{array}\right\}$ FI par somme $\forall x\in\,]0;+\infty[,\, f(x)=x^2\left(-6+\dfrac{10}{x}-2\times\dfrac{\ln(x)}{x^2}\right)$ or $\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{\ln(x)}{x^2}=0$ $\left.\begin{array}{r}\lim\limits_{x\to+\infty} x^2=+\infty\\ \lim\limits_{x\to+\infty} -6+\dfrac{10}{x}-2\times\dfrac{\ln(x)}{x^2}=-6\end{array}\right\}$ donc, par produit, $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)=-\infty$

2.

f est dérivable sur $]0;+\infty[$

$\forall x \in]0;+\infty[, f(x) = -6x^2 + 10x - 2\ln(x)$

$$f'(x) = -12x + 10 - \frac{2}{x} = \frac{-12x^2 + 10x - 2}{x}$$

$$f'(x) > 0 \Leftrightarrow -12x^2 + 10x - 2 > 0 \text{ car } x > 0$$

$$\Delta = 100 - 4 \times 24 = 4 > 0$$

$$x_1 = \frac{-10 - \sqrt{4}}{-24} = \frac{1}{2} \quad \text{et} \quad x_2 = \frac{-10 + \sqrt{4}}{-24} = \frac{1}{3}$$

La parabole est tournée vers le bas car $a = -12 > 0$

x	$-\infty$	0		$\frac{1}{3}$		$\frac{1}{2}$		$+\infty$
$-12x^2+10x-2$		||	$-$	0	$+$	0	$-$	

J'en déduis que :

x	0		$\frac{1}{3}$		$\frac{1}{2}$		$+\infty$
$f'(x)$	||	$-$	0	$+$	0	$-$	
$f(x)$	|| $+\infty$	$\searrow$	$\frac{8}{3}+2\,ln(3)$	$\nearrow$	$\frac{7}{2}+2\,ln(2)$	$\searrow$	$-\infty$

$$f\left(\frac{1}{3}\right) = -\frac{6}{9} + \frac{10}{3} - 2\ln\left(\frac{1}{3}\right) = \frac{8}{3} + 2\ln(3)$$

$$f\left(\frac{1}{2}\right) = \frac{-6}{4} + \frac{10}{2} - 2\ln\left(\frac{1}{2}\right) = \frac{7}{2} + 2\ln(2)$$

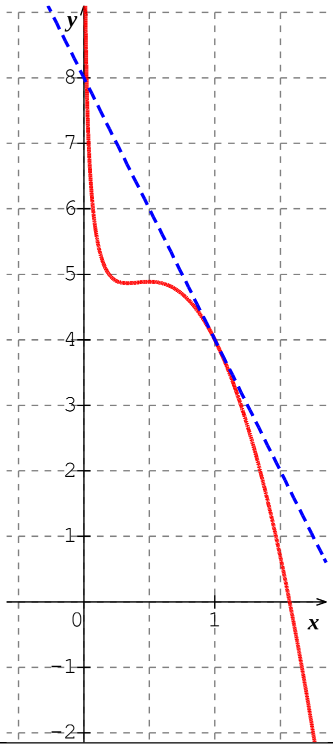
3.

$f(1) = -6 + 10 - 2\ln(1) = 4$

$f'(1) = \dfrac{-12 + 10 - 2}{1} = -4$

$y = -4(x-1) + 4 = -4x + 4 + 4$

$y = -4x + 8$



4.

f' est dérivable sur $]0;+\infty[$

$\forall x \in]0;+\infty[, f'(x) = \dfrac{-12x^2 + 10x - 2}{x}$

$$f''(x) = \frac{(-24x+10)x - (-12x^2 + 10x - 2)}{x^2}$$

$$f''(x) = \frac{-24x^2 + 10x + 12x^2 - 10x + 2}{x^2} = \frac{-12x^2 + 2}{x^2}$$

$$f''(x) > 0 \Leftrightarrow -12x^2 + 2 > 0 \ \text{ car } x^2 > 0$$

$$\Leftrightarrow x^2 < \frac{2}{12}$$

$$\Leftrightarrow 0 < x < \sqrt{\frac{1}{6}} \ \text{ ou } \ \underbrace{0 > x > -\sqrt{\frac{1}{6}}}_{\text{exclu}}$$

$$\Leftrightarrow 0 < x < \frac{\sqrt{6}}{6}$$

x	0	$\frac{\sqrt{6}}{6}$	$+\infty$
$f''(x)$	$+$	0	$-$
f	*convexe*		*concave*

Correction de l'exercice 5.

Partie A : On étudie la fonction définie sur $]0;+\infty[$ par $g(x) = 4x - 4 + 2\ln(x)$.

▶ 1. Dresser, en justifiant, le tableau de variations de la fonction g.

▶ 2. Calculer $g(1)$. En déduire le signe de la fonction g.

Partie B : Soit la fonction définie sur $]0;+\infty[$ par $f(x) = 2x^2 - 6x + 2x\ln(x)$.

▶ 1. Etudier les limites de la fonction f aux bornes de son ensemble de définition.

▶ 2. Dresser, en justifiant, le tableau de variations de la fonction f.

▶ 3. Déterminer l'équation de la tangente à la courbe en e.

▶ 4. La courbe de la fonction f admet-elle un point d'inflexion ? Justifier.

Exercice 5.

A1.

g est dérivable sur $]0;+\infty[$

$\forall x \in]0;+\infty[, g(x) = 4x - 4 + 2\ln(x)$

$$g'(x) = 4 + \frac{2}{x} = \frac{4x+2}{x}$$

$$g'(x) > 0 \Leftrightarrow 4x + 2 > 0 \text{ car } x > 0$$

$$\Leftrightarrow x > -\frac{2}{4}$$

J'en déduis que $\forall x \in]0;+\infty[, g'(x) > 0$

x	0	$+\infty$
$g'(x)$	$+$	
$g(x)$	$\nearrow$	

A2.

$g(1) = 4 - 4 + 2\ln(1) = 0$

J'en déduis le signe de la fonction g :

x	0		1		$+\infty$
$g(x)$		$-$	0	$+$	

B1.

$$\left.\begin{array}{r}\lim\limits_{x\to 0^+} 2x = 0 \\ \lim\limits_{x\to 0^+} \ln(x) = -\infty\end{array}\right\}\text{FI par produit}$$

$$\text{or } \lim_{x\to 0^+} x\ln(x) = 0$$

$$\text{donc } \left.\begin{array}{r}\lim\limits_{x\to 0^+} 2x^2 - 6x = 0 \\ \lim\limits_{x\to 0^+} 2x\ln(x) = 0\end{array}\right\}\text{donc, par somme, } \lim_{x\to 0^+} f(x) = 0$$

$$\left.\begin{array}{r}\lim\limits_{x\to +\infty} -6x = -\infty \\ \lim\limits_{x\to +\infty} 2x^2 + 2x\ln(x) = +\infty\end{array}\right\}\text{FI par somme}$$

$$\forall x \in]0;+\infty[, f(x) = x^2\left(2 - \frac{6}{x} + 2\frac{\ln(x)}{x}\right) \quad \text{or } \lim_{x\to +\infty} \frac{\ln(x)}{x} = 0$$

$$\left.\begin{array}{r}\lim\limits_{x\to +\infty} x^2 = +\infty \\ \lim\limits_{x\to +\infty} 2 - \frac{6}{x} + 2\frac{\ln(x)}{x} = 2\end{array}\right\}\text{donc, par produit, } \lim_{x\to +\infty} f(x) = +\infty$$

B2.

f est dérivable sur $]0;+\infty[$

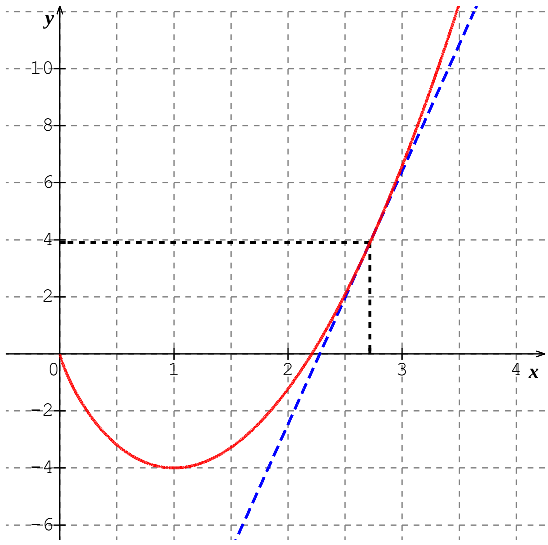
$\forall x \in]0;+\infty[, f(x) = 2x^2 - 6x + 2x\ln(x)$

$$f'(x) = 4x - 6 + 2\ln(x) + 2x \times \frac{1}{x}$$
$$f'(x) = 4x - 6 + 2\ln(x) + 2$$
$$f'(x) = 4x - 4 + 2\ln(x)$$
$$f'(x) = g(x)$$

$$f'(x) > 0 \Leftrightarrow g(x) > 0$$

x	0		1		$+\infty$
$f'(x)$		$-$	0	$+$	
$f(x)$	0	$\searrow$	-4	$\nearrow$	$+\infty$

$$f(1) = 2 - 6 + 2\ln(1) = -4$$

	B3.	$f(e) = 2e^2 - 6e + 2e\ln(e) = 2e^2 - 4e$ $f'(e) = 4e - 4 + 2\ln(e) = 4e - 2$ $y = (4e-2)(x-e) + 2e^2 - 4e = (4e-2)x - 4e^2 + 2e + 2e^2 - 4e$ $y = (4e-2)x - 2e^2 - 2e$ 
	B4.	f' est dérivable sur $]0;+\infty[$ $\forall x \in]0;+\infty[, f'(x) = g(x)$ $f''(x) = g'(x)$ $\forall x \in]0;+\infty[, g'(x) > 0$ J'en déduis que la fonction f est convexe sur $]0;+\infty[$.

Correction de l'exercice 6.

Soit $k \in \mathbb{N}^*$, on définit la fonction f_k sur $]0;+\infty[$ par $f_k(x) = x - \frac{k\ln(x)}{x}$.
Pour tout $k \in \mathbb{N}^*$, la courbe de f_k admet un point d'inflexion, on appelle u_k l'ordonnée de ce point d'inflexion. La suite (u_k) est-elle convergente ?

Exercice 6.

$\forall k \in \mathbb{N}^*, \quad f_k$ est dérivable sur $]0;+\infty[$

$$\forall x \in]0;+\infty[, \quad f_k'(x) = 1 - \frac{kx \times \frac{1}{x} - k\ln(x)}{x^2}$$

$$f_k'(x) = \frac{x^2 - k + k\ln(x)}{x^2}$$

$\forall k \in \mathbb{N}^*, \quad f'_k$ est dérivable sur $]0;+\infty[$

$$\forall x \in]0;+\infty[, \quad f_k''(x) = \frac{\left(2x + \frac{k}{x}\right)x^2 - 2x(x^2 - k + k\ln(x))}{x^4}$$

$$f_k''(x) = \frac{2x^3 + kx - 2x^3 + 2kx - 2kx\ln(x)}{x^4}$$

$$f_k''(x) = \frac{3kx - 2kx\ln(x)}{x^4}$$

$$f_k''(x) = \frac{3k - 2k\ln(x)}{x^3}$$

$$f''(x) > 0 \Leftrightarrow 3k - 2k\ln(x) > 0 \text{ car } x > 0$$

$$\Leftrightarrow \ln(x) < \frac{3k}{2k}$$

$$\Leftrightarrow \ln(x) < 1{,}5$$

$$\Leftrightarrow x < e^{1{,}5}$$

x	0	$e^{1,5}$	$+\infty$
$f''(x)$	$+$	0	$-$
f	$convexe$		$concave$

$\forall k \in \mathbb{N}^*, \quad f_k$ admet donc un point d'inflexion d'abscisse $e^{1,5}$

$$\text{donc } u_k = f_k(e^{1,5}) = e^{1,5} - \frac{k\ln(e^{1,5})}{e^{1,5}}$$

$$u_k = e^{1,5} - \frac{1{,}5\,k}{e^{1,5}}$$

$$\forall k \in \mathbb{N}^*, \quad u_k = \frac{e^3 - 1{,}5\,k}{e^{1,5}}$$

$$\lim_{k\to+\infty} u_k = \lim_{k\to+\infty} e^3 - 1{,}5\,k = -\infty \text{ car } e^{1,5} > 0$$