Terminale Spécialité Mathématiques
Tâche n° $\boxed{1}$ $\boxed{5}$
Loi binomiale

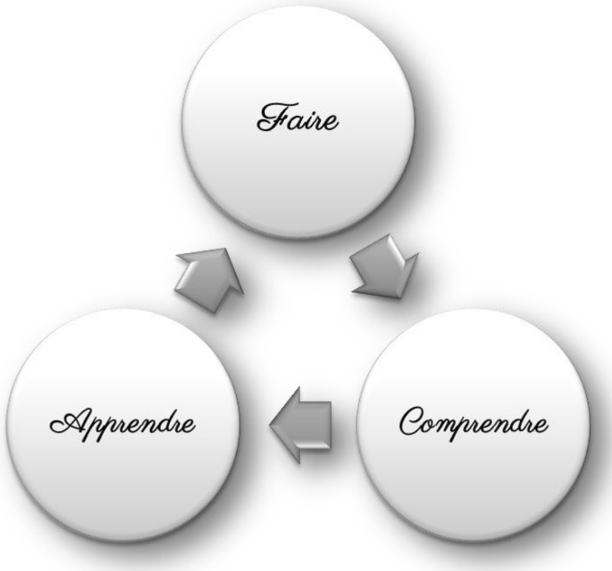


Table des matières

Tâche n° $\boxed{1}$ $\boxed{5}$
Loi binomiale
Enoncé des exercices

Exercice 1.

Une entreprise fabrique des petites tiges métalliques. La probabilité qu'une tige ait un défaut de longueur est 0,1. L'entreprise fournit ces tiges par lot de 50. La production est suffisamment importante pour que l'on assimile le choix de 50 tiges à un tirage avec remise. Soit X la variable aléatoire qui, à un lot de 50 tiges, associe le nombre de tige ayant un défaut de longueur.

▶ 1. Justifiez que X suit une loi binomiale et précisez les paramètres.

▶ 2. Déterminer la probabilité que le lot :

a) ne contienne aucune une tige ayant un défaut de longueur.

b) contienne exactement une tige ayant un défaut de longueur.

c) contienne exactement trois tiges ayant un défaut de longueur.

d) contienne au moins une tige ayant un défaut de longueur.

▶ 3 a) Calculer l'espérance de la variable aléatoire X.

b) Le remplacement d'une tige ayant un défaut de longueur dans un lot coûte 0,50€. A quel montant moyen doit-on s'attendre à payer ?

Exercice 2.

Une compagnie aérienne annonce qu'elle souhaite augmenter sa rentabilité, tout en surveillant la fiabilité de ses appareils et en garantissant la satisfaction de ses passagers. On considère que, pour un passager ayant acheté un billet, la probabilité de se présenter à l'embarquement pour ce vol est de 0,96.
Afin d'augmenter sa rentabilité, la compagnie décide de pratiquer la surréservation. Pour cela, elle vend 250 billets pour un vol dans un avion ne contenant que 246 places. Soit X la variable aléatoire comptant le nombre de passagers se présentant à l'embarquement pour ce vol.

▶ 1. Justifiez que X suit une loi binomiale de paramètres $n = 250$ et $p = 0{,}96$.

▶ 2a) Déterminer la probabilité qu'exactement 246 passagers se présentent à l'embarquement pour ce vol.

b) Donner une valeur approchée de la probabilité qu'au maximum 246 passagers se présentent à l'embarquement pour ce vol.

c) Donner une valeur approchée de la probabilité qu'il y ait entre 246 et 248 passagers à l'embarquement pour ce vol.

▶ 3. Calculer l'espérance de la variable aléatoire X. Interpréter ce résultat dans le cadre de l'exercice.

Exercice 3.

On s'intéresse à la greffe de cornée en France. Les données utilisées portent sur l'année 2015 et sont extraites du bilan d'activité 2016 de l'agence de biomédecine sur le

prélèvement, la greffe et l'inscription en attente de greffe. 47,6 % des inscrits en 2015 en Île-de-France ont reçu une greffe de cornée la même année. On choisit au hasard 100 inscrits en 2015. Ce choix est assimilable à un tirage avec remise.
On note X la variable aléatoire qui compte le nombre de personnes greffées dans ce groupe.
▶1. Justifiez que X suit une loi binomiale et précisez les paramètres.
▶2a) Déterminer la probabilité d'avoir exactement 50 personnes greffées.
b) Donner une valeur approchée de la probabilité d'avoir au moins 40 personnes greffées.
c) Donner une valeur approchée de la probabilité d'avoir entre 40 et 50 personnes greffées.
▶3. Calculer l'espérance de la variable aléatoire X. Interpréter ce résultat dans le cadre de l'exercice.

Exercice 4.

L'équipe « recherche et développement » d'une entreprise souhaite créer un nouveau modèle de paire de lunettes de réalité augmentée. On lance une fabrication test pour laquelle on estime que 5 % des paires de lunettes présentent un défaut. On prélève alors au hasard 12 paires de lunettes. On suppose que la fabrication est suffisamment importante pour considérer le tirage avec remise. On note X la variable aléatoire donnant le nombre de paires de lunettes défectueuses par lot.
▶1. Justifiez que X suit une loi binomiale et précisez les paramètres.
▶2. Déterminer la probabilité de n'avoir aucune paire de lunettes défectueuse par lot.
▶3. Calculer l'espérance de X. Interpréter le résultat dans le cadre de cet énoncé.
▶4. Le chef d'entreprise demande à ce que la fiabilité soit améliorée. En posant p la probabilité qu'une paire de lunettes présente un défaut, déterminer p pour que la probabilité de n'avoir aucune paire de lunettes défectueuse par lot soit supérieure à 80%.

Tâche n° 1 5
Loi binomiale
Correction des exercices

Correction de l'exercice 1.

Une entreprise fabrique des petites tiges métalliques. La probabilité qu'une tige ait un défaut de longueur est 0,1. L'entreprise fournit ces tiges par lot de 50. La production est suffisamment importante pour que l'on assimile le choix de 50 tiges à un tirage avec remise. Soit X la variable aléatoire qui, à un lot de 50 tiges, associe le nombre de tige ayant un défaut de longueur.

▶ 1. Justifiez que X suit une loi binomiale et précisez les paramètres.

▶ 2. Déterminer la probabilité que le lot :

a) ne contienne aucune une tige ayant un défaut de longueur.

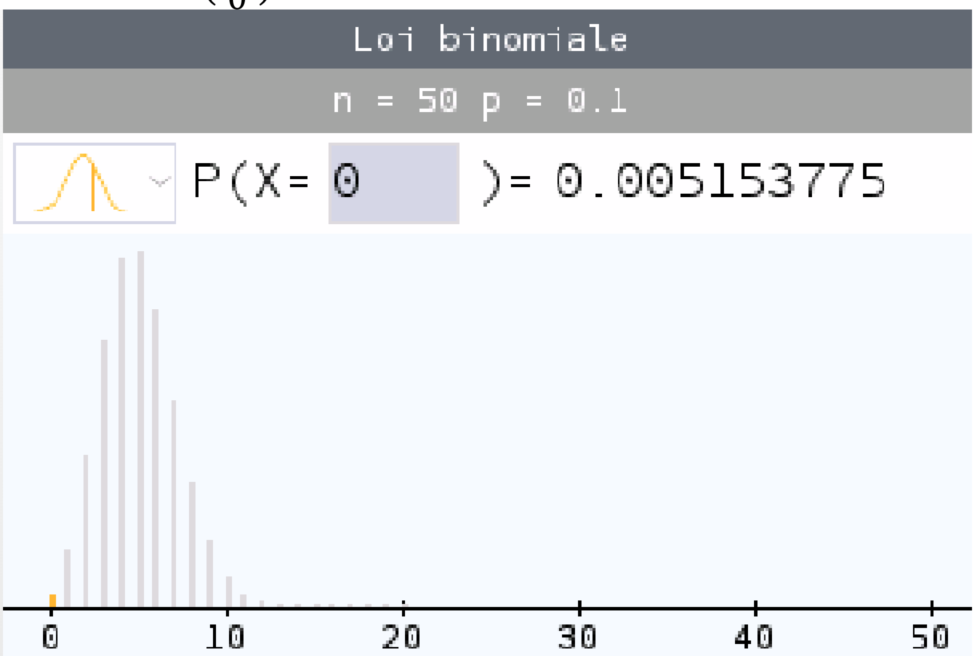
b) contienne exactement une tige ayant un défaut de longueur.

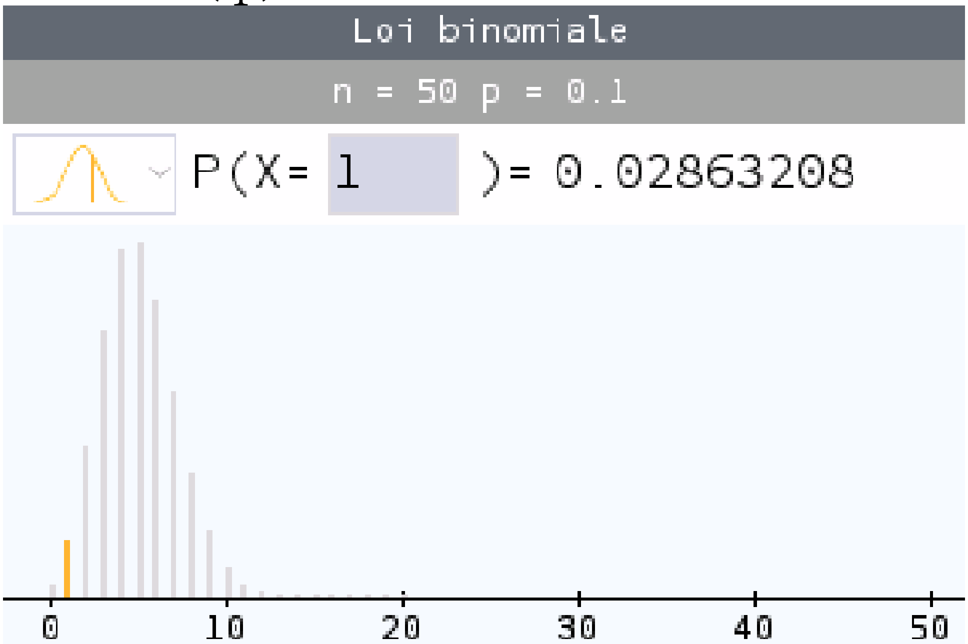
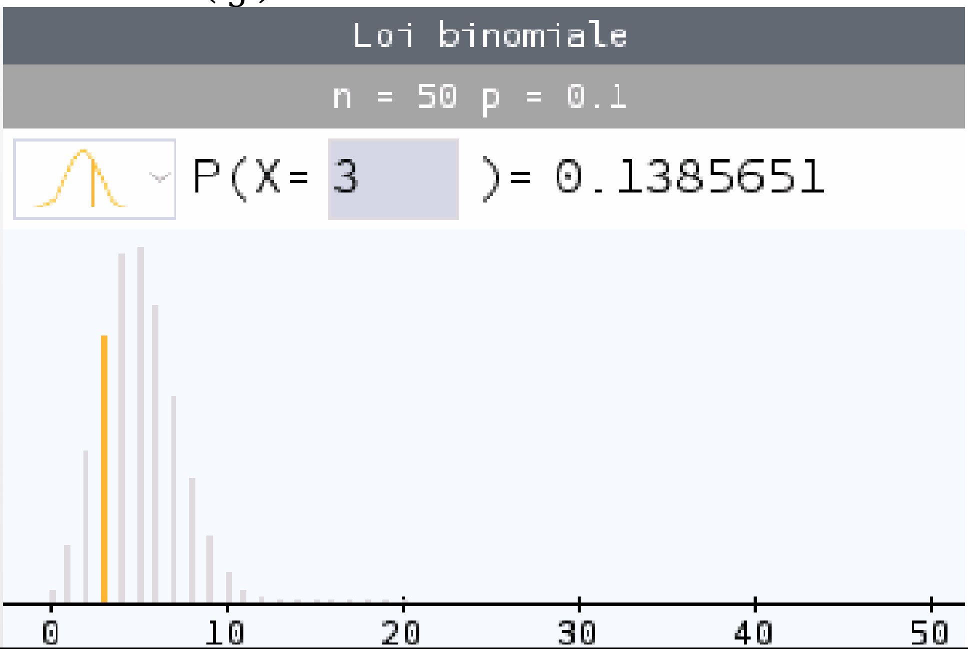
c) contienne exactement trois tiges ayant un défaut de longueur.

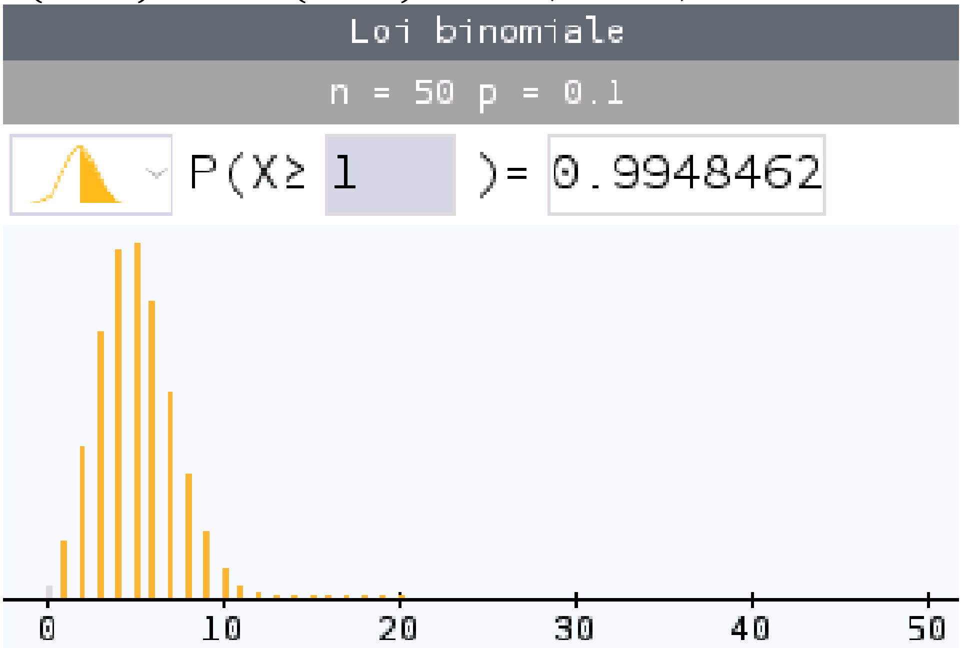
d) contienne au moins une tige ayant un défaut de longueur.

▶ 3 a) Calculer l'espérance de la variable aléatoire X.

b) Le remplacement d'une tige ayant un défaut de longueur dans un lot coûte 0,50€. A quel montant moyen doit-on s'attendre à payer ?

Exercice 1.	**1.**	Pour chaque tige du lot, la probabilité qu'elle ait un défaut de longueur est 0,1. On répète alors 50 fois, de façon identique et indépendante, l'alternative où la probabilité d'un succès est 0,1. X la variable aléatoire qui, à un lot de 50 tiges, associe le nombre de tige ayant un défaut de longueur suit donc une loi binomiale de paramètres $n = 50$ et $p = 0,1$.
	2a.	$P(X=0) = \binom{50}{0} \times 0,1^0 \times 0,9^{50} = 0,9^{50} \approx 0,005$ 

	2b.	$P(X=1)=\binom{50}{1}\times 0{,}1^{1}\times 0{,}9^{49}=5\times 0{,}9^{49}\approx 0{,}029$ 
	2c.	$P(X=3)=\binom{50}{3}\times 0{,}1^{3}\times 0{,}9^{47}\approx 0{,}139$ 

	2d.	$P(X \geq 1) = 1 - P(X = 0) = 1 - 0{,}9^{50} \approx 0{,}995$ 
	3a.	$E(X) = 0{,}1 \times 50 = 5$
	3b.	Cela signifie que l'on peut s'attendre à avoir, en moyenne, 5 tiges ayant un défaut de longueur par lot et donc à dépenser 2,50 € par lot pour remplacer les tiges qui ont un défaut.

Correction de l'exercice 2.

Une compagnie aérienne annonce qu'elle souhaite augmenter sa rentabilité, tout en surveillant la fiabilité de ses appareils et en garantissant la satisfaction de ses passagers. On considère que, pour un passager ayant acheté un billet, la probabilité de se présenter à l'embarquement pour ce vol est de 0,96.
Afin d'augmenter sa rentabilité, la compagnie décide de pratiquer la surréservation. Pour cela, elle vend 250 billets pour un vol dans un avion ne contenant que 246 places. Soit X la variable aléatoire comptant le nombre de passagers se présentant à l'embarquement pour ce vol.

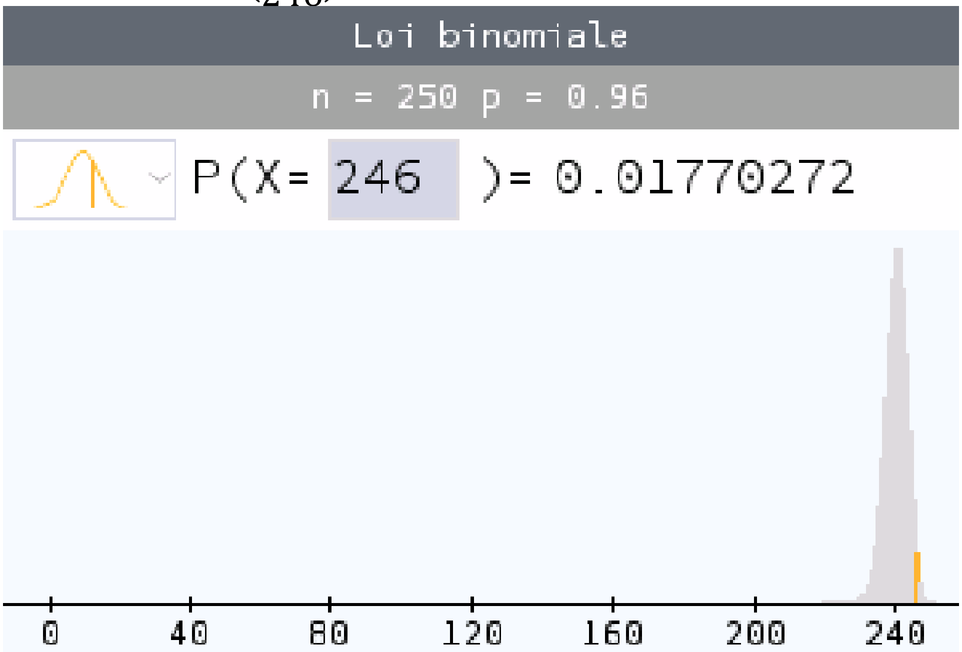
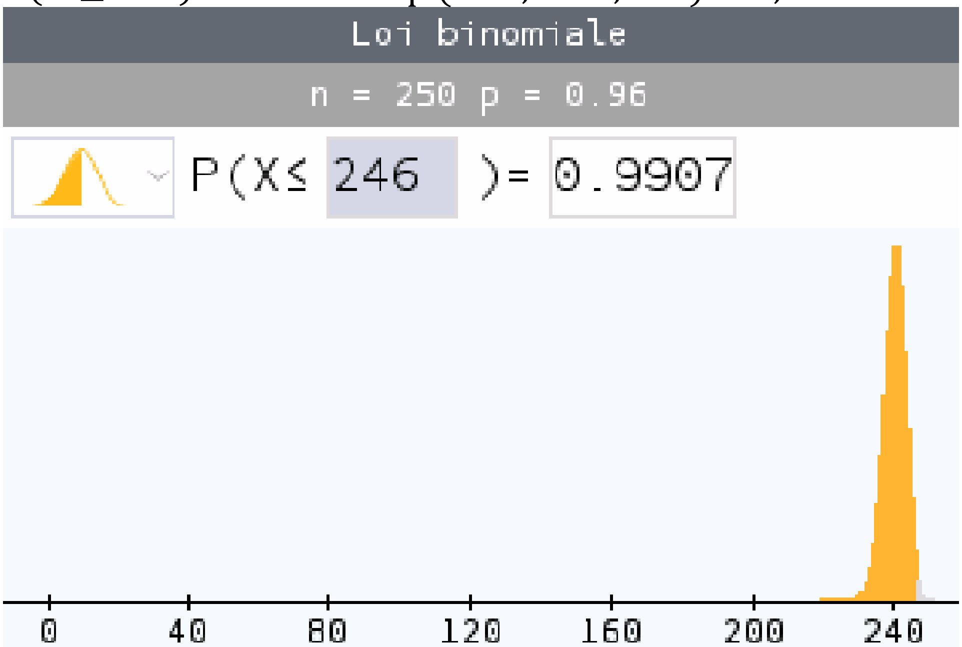
▶1. Justifiez que X suit une loi binomiale de paramètres $n = 250$ et $p = 0{,}96$.

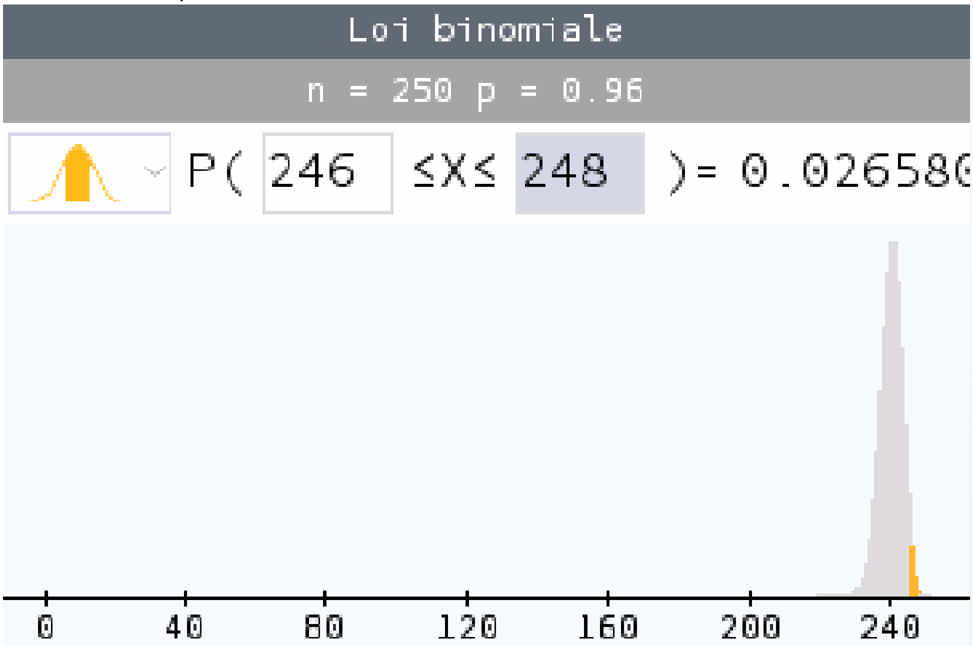
▶2a) Déterminer la probabilité qu'exactement 246 passagers se présentent à l'embarquement pour ce vol.

b) Donner une valeur approchée de la probabilité qu'au maximum 246 passagers se présentent à l'embarquement pour ce vol.

c) Donner une valeur approchée de la probabilité qu'il y ait entre 246 et 248 passagers à l'embarquement pour ce vol.

▶3. Calculer l'espérance de la variable aléatoire X. Interpréter ce résultat dans le cadre de l'exercice.

Exercice 2.	**1.**	Pour chaque place vendue, la probabilité que la personne se présente à l'embarquement est 0,96. On répète alors 250 fois, de façon identique et indépendante, l'alternative où la probabilité d'un succès est 0,96. X la variable aléatoire qui, pour chaque vol, associe le nombre de passagers se présentant à l'embarquement suit donc une loi binomiale de paramètres $n = 250$ et $p = 0{,}96$.
	2a.	$P(X = 246) = \binom{250}{246} \times 0{,}96^{246} \times 0{,}04^{4} \approx 0{,}018$ 
	2b.	$P(X \leq 246) = \text{binomFRép}\,(250\,, 0.96\,, 246) \approx 0{,}991$ 

	2c.	$P(246 \leq X \leq 248) = P(X \leq 248) - P(X < 246)$ $= P(X \leq 248) - P(X \leq 245)$ $= \text{binomFRép}\,(250\,,0.96\,,248) - \text{binomFRép}\,(250\,,0.96\,,245)$ $\approx 0{,}027$ 
	3.	$E(X) = 0{,}96 \times 250 = 240$ Cela signifie que l'on peut s'attendre à avoir, en moyenne, 240 passagers qui se présentent à l'embarquement par vol.

Correction de l'exercice 3.

On s'intéresse à la greffe de cornée en France. Les données utilisées portent sur l'année 2015 et sont extraites du bilan d'activité 2016 de l'agence de biomédecine sur le prélèvement, la greffe et l'inscription en attente de greffe. 47,6 % des inscrits en 2015 en Île-de-France ont reçu une greffe de cornée la même année. On choisit au hasard 100 inscrits en 2015. Ce choix est assimilable à un tirage avec remise.

On note X la variable aléatoire qui compte le nombre de personnes greffées dans ce groupe.

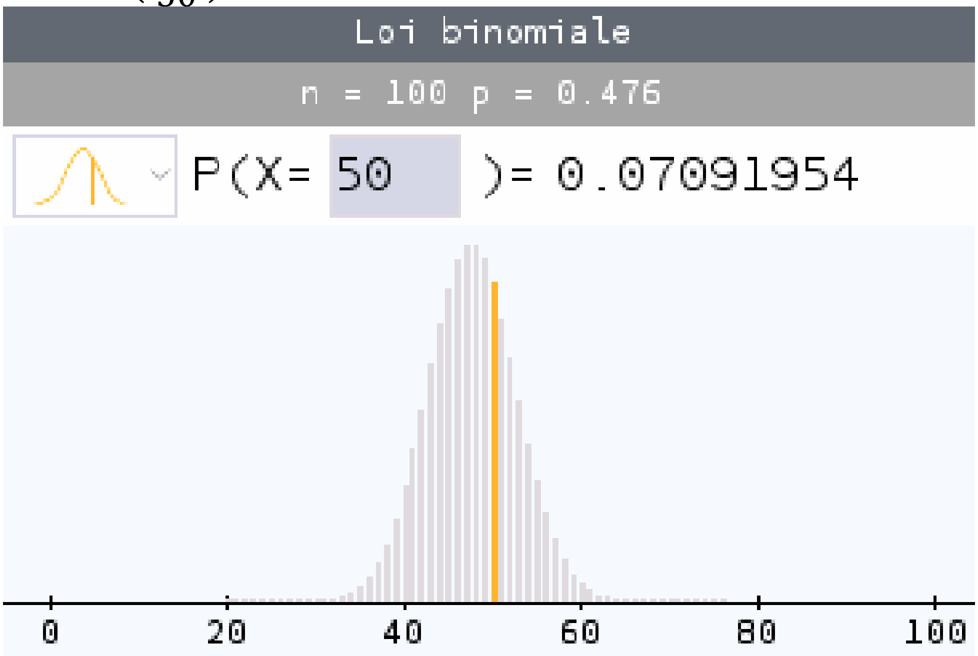
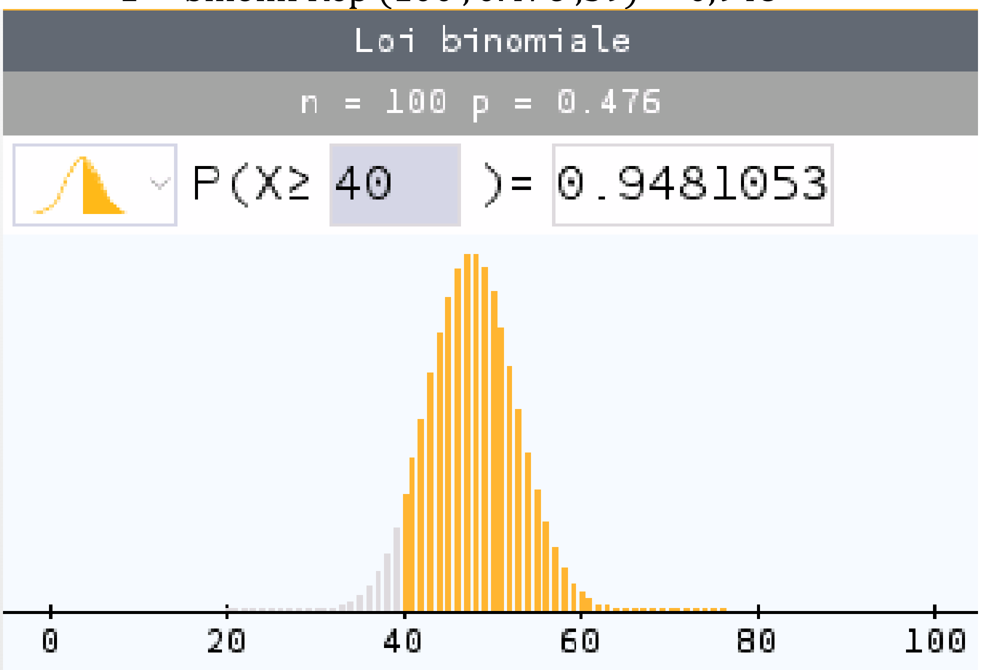
▶1. Justifiez que X suit une loi binomiale et précisez les paramètres.

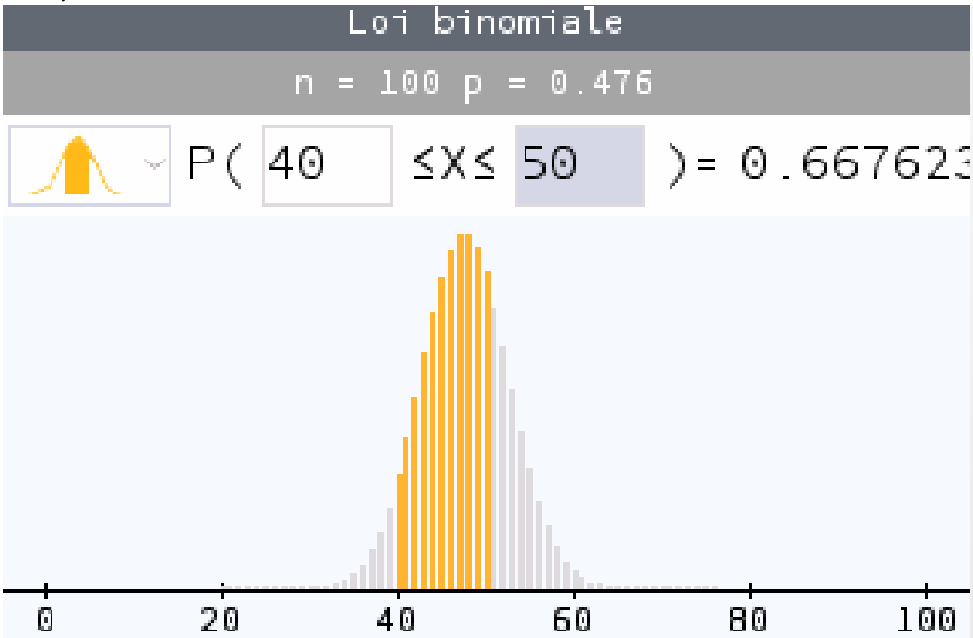
▶2a) Déterminer la probabilité d'avoir exactement 50 personnes greffées.

b) Donner une valeur approchée de la probabilité d'avoir au moins 40 personnes greffées.

c) Donner une valeur approchée de la probabilité d'avoir entre 40 et 50 personnes greffées.

▶3. Calculer l'espérance de la variable aléatoire X. Interpréter ce résultat dans le cadre de l'exercice.

Exercice 3.	**1.**	Pour chaque personne inscrite choisie au hasard, la probabilité que la personne soit greffée est 0,476. On répète alors 100 fois, de façon identique et indépendante, l'alternative où la probabilité d'un succès est 0,476. X la variable aléatoire qui compte le nombre de personnes greffées dans ce groupe suit donc une loi binomiale de paramètres $n = 100$ et $p = 0{,}476$.
	2a.	$P(X = 50) = \binom{100}{50} \times 0{,}476^{50} \times 0{,}524^{50} \approx 0{,}071$ 
	2b.	$P(X \geq 40) = 1 - P(X < 40)$ $= 1 - P(X \leq 39)$ $= 1 - \text{binomFRép}\ (100\ , 0.476\ , 39) \approx 0{,}948$ 

	2c.	$P(40 \leq X \leq 50) = P(X \leq 50) - P(X < 40)$ $= P(X \leq 50) - P(X \leq 39)$ $=$ binomFRep (100 , 0.476 ,50) $-$ binomFRep (100 , 0.476 , 39) $\approx 0{,}668$ 
	3.	$E(X) = 0{,}476 \times 100 = 47{,}6$ Cela signifie que l'on peut s'attendre à avoir, en moyenne, 47,6 personnes greffées par groupe de 100 personnes inscrites.

Correction de l'exercice 4.

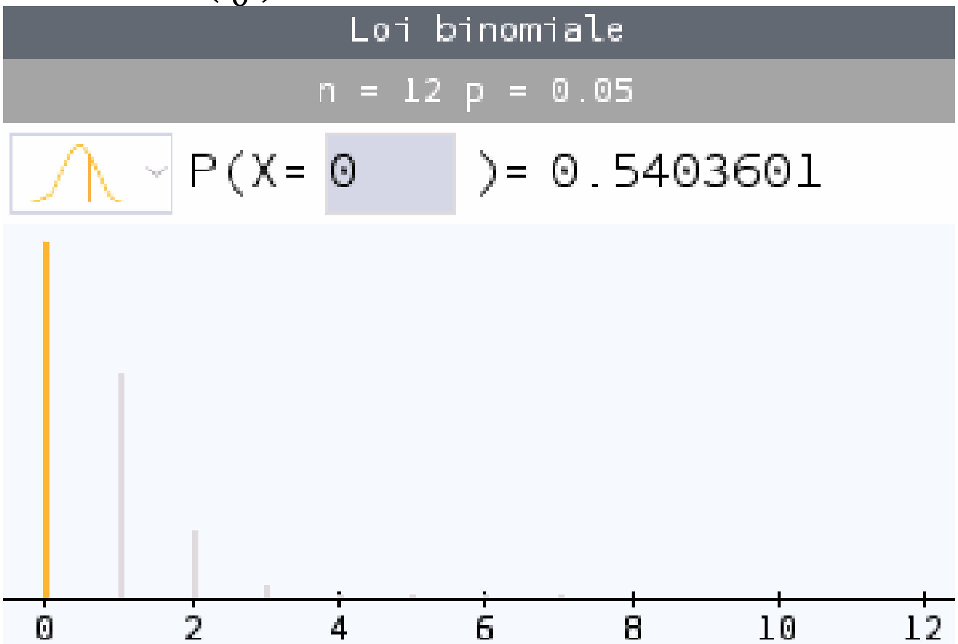
L'équipe « recherche et développement » d'une entreprise souhaite créer un nouveau modèle de paire de lunettes de réalité augmentée. On lance une fabrication test pour laquelle on estime que 5 % des paires de lunettes présentent un défaut. On prélève alors au hasard 12 paires de lunettes. On suppose que la fabrication est suffisamment importante pour considérer le tirage avec remise. On note X la variable aléatoire donnant le nombre de paires de lunettes défectueuses par lot.

▶1. Justifiez que X suit une loi binomiale et précisez les paramètres.

▶2. Déterminer la probabilité de n'avoir aucune paire de lunettes défectueuse par lot.

▶3. Calculer l'espérance de X. Interpréter le résultat dans le cadre de cet énoncé.

▶4. Le chef d'entreprise demande à ce que la fiabilité soit améliorée. En posant p la probabilité qu'une paire de lunettes présente un défaut, déterminer p pour que la probabilité de n'avoir aucune paire de lunettes défectueuse par lot soit supérieure à 80%.

Exercice 4.	**1.**	Pour chaque paire de lunette, la probabilité qu'elle comporte un défaut est 0,05. On répète alors 12 fois, de façon identique et indépendante, l'alternative où la probabilité d'un succès est 0,05. X la variable aléatoire donnant le nombre de paires de lunettes défectueuses par lot suit donc une loi binomiale de paramètres $n = 12$ et $p = 0{,}05$.
	2.	$P(X = 0) = \binom{12}{0} \times 0{,}05^0 \times 0{,}95^{12} = 0{,}95^{12} \approx 0{,}54$ 
	3.	$E(X) = 0{,}05 \times 12 = 0{,}6$ Cela signifie que l'on peut s'attendre à avoir, en moyenne, 0,6 paires de lunettes défectueuses par lot.
	4.	Soit p la probabilité qu'une paire de lunettes présente un défaut, la probabilité de n'avoir aucune paire de lunettes défectueuse par lot est donc $(1-p)^{12}$ $(1-p)^{12} \geq 0{,}8$ $1 - p \geq \sqrt[12]{0{,}8}$ $1 - \sqrt[12]{0{,}8} \geq p$ Il faut alors que $p \approx 0{,}018$.