Terminale
Contrôle
Spécialité Mathématiques

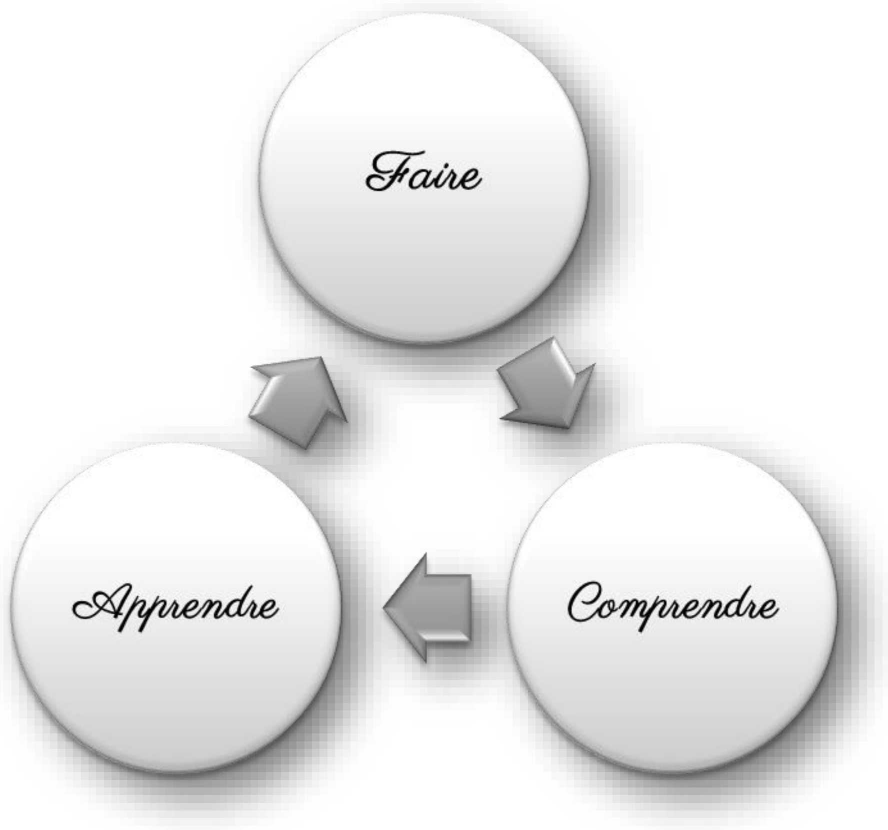


Table des matières

Terminale Contrôle

Spécialité Mathématiques

Enoncé du sujet

Exercice 1. (6 points)

Une urne contient 10 boules rouges, 8 boules blanches et 6 boules bleues. On tire 3 boules sans les remplacer, calculer la probabilité pour que :

▶ 1. les trois boules soient rouges

▶ 2. au moins une soit blanche

▶ 3. deux boules soient rouges et une soit blanche

▶ 4. il y ait une boule de chaque couleur

▶ 5. on tire dans l'ordre bleu, blanc, rouge.

Exercice 2. (7 points)

Une entreprise produit en grande série des clés USB pour l'industrie informatique.
On prélève au hasard 100 clés dans la production de la journée pour vérification. La production est assez grande pour que l'on puisse assimiler ce prélèvement à un tirage avec remise de 100 clés.
On admet que la probabilité qu'une clé USB prélevée au hasard dans la production d'une journée soit défectueuse est égale à 0,015.
On considère la variable aléatoire X qui, à tout prélèvement ainsi défini, associe le nombre de clés défectueuses de ce prélèvement.

▶ 1. Justifier que la variable aléatoire X suit une loi binomiale dont on déterminera les paramètres.

▶ 2. Calculer les probabilités $P(X = 0)$ et $P(X = 1)$.

▶ 3 a) Calculer la probabilité que, dans un tel prélèvement, aux plus deux clés soient défectueuses.

b) Calculer la probabilité que, dans un tel prélèvement, au moins une clé soit défectueuse.

▶ 4 a) Calculer l'espérance de la variable aléatoire X.

b) Le remplacement d'une clé USB défectueuse coûte 5 €. Quel montant moyen doit-on s'attendre à payer pour chaque prélèvement ?

Exercice 3. (7 points)

Pour chacune des propositions suivantes, indiquer si elle est vraie ou fausse et donner une justification de la réponse choisie. Une réponse non justifiée ne rapporte aucun point. Toutefois, toute trace de recherche, même incomplète, ou d'initiative, même non fructueuse, sera prise en compte dans l'évaluation.

L'espace est rapporté à un repère orthonormal $\left(O;\vec{\imath};\vec{\jmath};\vec{k}\right)$. On considère le point A de coordonnées $(6;-3;5)$ et les droites D et D' de représentations paramétriques :

$$D\begin{cases} x = 2t-1 \\ y = -3t+2 \\ z = t \end{cases} \text{ où } t \in \mathbb{R} \qquad D'\begin{cases} x = 3t' \\ y = t'+2 \\ z = 3t'-2 \end{cases} \text{ où } t' \in \mathbb{R}$$

Proposition 1 : « Le point A appartient à la droite D ».

Proposition 2 : « La droite D a pour vecteur directeur $\vec{u}\begin{pmatrix} 2 \\ -3 \\ 1 \end{pmatrix}$ ».

Proposition 3 : « Les droites D et D' sont parallèles ».
Proposition 4 : « Les droites D et D' sont coplanaires ».
Proposition 5 : « Les droites D et D' sont sécantes ».
Proposition 6 : « La droite D et la parallèle à D' qui passe par A sont sécantes ».

Terminale Contrôle
Spécialité Mathématiques
Correction du sujet

Correction de l'exercice 1. (6 points)

Une urne contient 10 boules rouges, 8 boules blanches et 6 boules bleues.
On tire 3 boules sans les remplacer, calculer la probabilité pour que :

- ▶1. les trois boules soient rouges
- ▶2. au moins une soit blanche
- ▶3. deux boules soient rouges et une soit blanche
- ▶4. il y ait une boule de chaque couleur
- ▶5. on tire dans l'ordre bleu, blanc, rouge.

Exercice 1.	**1.**	Le nombre total de tirages correspond au choix de 3 boules parmi 24 sans remise et sans ordre soit $\binom{24}{3} = 2024$. Le nombre de tirages qui contiennent 3 boules rouges est $\binom{10}{3} = 120$. La probabilité de tirer 3 boules rouges est $\frac{120}{2024} \approx 0{,}059289$
	2.	Le nombre de tirages qui ne contiennent aucune boule blanche est $\binom{16}{3} = 560$. La probabilité de tirer au moins une boule blanche est $1 - \frac{560}{2024} \approx 0{,}72332$
	3.	Le nombre de tirages qui contiennent deux boules rouges et une blanche est $\binom{10}{2} \times \binom{8}{1} = 360$. La probabilité de tirer deux boules rouges et une blanche est $\frac{360}{2024} \approx 0{,}17787$
	4.	Le nombre de tirages qui contiennent une boule de chaque couleur est $10 \times 8 \times 6 = 480$. La probabilité de tirer une boule de chaque couleur est $\frac{480}{2024} \approx 0{,}23715$

	5.	Le nombre total de tirage dans l'ordre correspond au choix de 3 boules parmi 24 sans remise mais en tenant compte de l'ordre soit $$A_{24}^{3}=\frac{24!}{21!}=12144.$$ Le nombre de façon de tirer dans l'ordre bleu, blanc, rouge est $6\times 8\times 10=480.$ La probabilité de tirer dans l'ordre bleu, blanc rouge est $$\frac{480}{12144}\approx 0{,}039526$$

Correction de l'exercice 2. (7 points)

Une entreprise produit en grande série des clés USB pour l'industrie informatique.
On prélève au hasard 100 clés dans la production de la journée pour vérification. La production est assez grande pour que l'on puisse assimiler ce prélèvement à un tirage avec remise de 100 clés.
On admet que la probabilité qu'une clé USB prélevée au hasard dans la production d'une journée soit défectueuse est égale à 0,015.
On considère la variable aléatoire X qui, à tout prélèvement ainsi défini, associe le nombre de clés défectueuses de ce prélèvement.

▶1. Justifier que la variable aléatoire X suit une loi binomiale dont on déterminera les paramètres.

▶2. Calculer les probabilités $P(X=0)$ et $P(X=1)$.

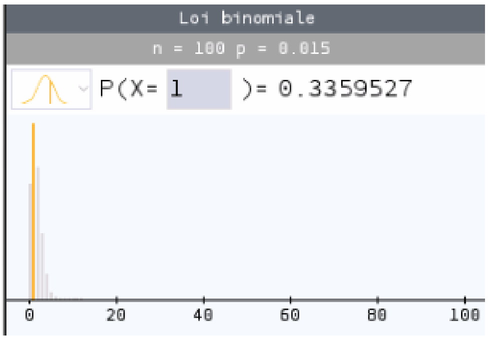
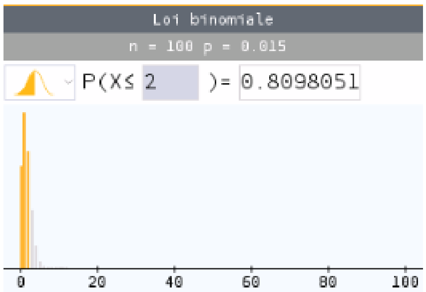
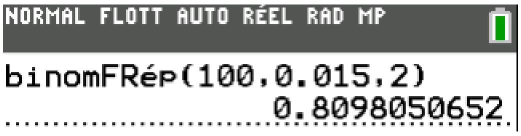
▶3 a) Calculer la probabilité que, dans un tel prélèvement, aux plus deux clés soient défectueuses.

b) Calculer la probabilité que, dans un tel prélèvement, au moins une clé soit défectueuse.

▶4 a) Calculer l'espérance de la variable aléatoire X.

b) Le remplacement d'une clé USB défectueuse coûte 5 €. Quel montant moyen doit-on s'attendre à payer pour chaque prélèvement ?

Exercice 2.	**1.**	Pour chaque clé USB prélevée au hasard dans la production d'une journée, la probabilité qu'elle soit défectueuse est égale à 0,015. On répète alors 100 fois, de façon identique et indépendante, l'alternative où la probabilité d'un succès est 0,015. X la variable aléatoire qui, à tout prélèvement, associe le nombre de clés défectueuses suit donc une loi binomiale de paramètres $n=100$ et $p=0{,}015$.

	2.	$P(X=0)=\binom{100}{0}\times 0{,}015^0\times(1-0{,}015)^{100}=0{,}985^{100}\approx 0{,}221$ $P(X=1)=\binom{100}{1}\times 0{,}015^1\times(1-0{,}015)^{99}\approx 0{,}336$ 
	3a.	$P(X\leq 2)=\text{binomFRép}\,(100\,,0.015\,,2)\approx 0{,}81$  
	3b.	$P(X\geq 1)=1-P(X=0)=1-0{,}985^{100}\approx 0{,}779$
	4a.	$E(X)=100\times 0{,}015=1{,}5$
	4b.	En moyenne, on peut s'attendre à avoir 1,5 clé USB défectueuse par prélèvement. Le coût moyen devrait être proche de $1{,}5\times 5=7{,}5$ euros par prélèvement.

Correction de l'exercice 3. (7 points)

Pour chacune des propositions suivantes, indiquer si elle est vraie ou fausse et donner une justification de la réponse choisie. Une réponse non justifiée ne rapporte aucun point. Toutefois, toute trace de recherche, même incomplète, ou d'initiative, même non fructueuse, sera prise en compte dans l'évaluation.

L'espace est rapporté à un repère orthonormal $\left(O;\vec{\imath};\vec{\jmath};\vec{k}\right)$. On considère le point A de coordonnées $(6;-3;5)$ et les droites D et D' de représentations paramétriques :

$$D\begin{cases}x=2t-1\\ y=-3t+2\\ z=t\end{cases}\text{ où } t\in\mathbb{R}\qquad\qquad D'\begin{cases}x=3t'\\ y=t'+2\\ z=3t'-2\end{cases}\text{ où } t'\in\mathbb{R}$$

Proposition 1 : « Le point A appartient à la droite D ».

Proposition 2 : « La droite D a pour vecteur directeur $\vec{u}\begin{pmatrix}2\\-3\\1\end{pmatrix}$ ».

Proposition 3 : « Les droites D et D' sont parallèles ».
Proposition 4 : « Les droites D et D' sont coplanaires ».
Proposition 5 : « Les droites D et D' sont sécantes ».
Proposition 6 : « La droite D et la parallèle à D' qui passe par A sont sécantes ».

<table>
<tr>
<td rowspan="3">Exercice 3.</td>
<td>1.</td>
<td>

$$A(6;-3;5)$$

$$\begin{cases} 6 = 2t-1 \\ -3 = -3t+2 \\ 5 = t \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 7 = 2t \\ -5 = -3t \\ 5 = t \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} t = \dfrac{7}{2} \\ t = \dfrac{5}{3} \\ t = 5 \end{cases}$$

Le système n'admet donc pas de solution, le point A n'appartient donc pas à la droite D.

La proposition 1 est fausse.

</td>
</tr>
<tr>
<td>2.</td>
<td>

$D \begin{cases} x = 2t-1 \\ y = -3t+2 \\ z = t \end{cases}$ où $t \in \mathbb{R}$

La droite D admet le vecteur $\vec{u}\begin{pmatrix} 2 \\ -3 \\ 1 \end{pmatrix}$ pour vecteur directeur.

La proposition 2 est vraie.

</td>
</tr>
<tr>
<td>3.</td>
<td>

$D \begin{cases} x = 2t-1 \\ y = -3t+2 \\ z = t \end{cases}$ où $t \in \mathbb{R}$ $\qquad$ $D' \begin{cases} x = 3t' \\ y = t'+2 \\ z = 3t'-2 \end{cases}$ où $t' \in \mathbb{R}$

La droite D admet le vecteur $\vec{u}\begin{pmatrix} 2 \\ -3 \\ 1 \end{pmatrix}$ pour vecteur directeur.

La droite D' admet le vecteur $\vec{v}\begin{pmatrix} 3 \\ 1 \\ 3 \end{pmatrix}$ pour vecteur directeur.

$$\frac{2}{3} \neq -\frac{3}{1} \neq \frac{1}{3}$$

donc les vecteurs $\vec{u}$ et $\vec{v}$ ne sont pas colinéaires et les droites D et D' ne sont pas parallèles.

La proposition 3 est fausse.

</td>
</tr>
</table>

4.

Pour savoir si les droites D et D' sont coplanaires, on peut choisir 2 points de chaque droite ou bien 1 vecteur directeur de chaque droite et un vecteur transversal entre les deux droites :

$$D\ \begin{cases} x = 2t - 1 \\ y = -3t + 2 \quad \text{où } t \in \mathbb{R} \\ z = t \end{cases}$$

$E(-1; 2; 0) \in D$ obtenu avec $t = 0$
$F(1; -1; 1) \in D$ obtenu avec $t = 1$

$$D'\ \begin{cases} x = 3t' \\ y = t' + 2 \quad \text{où } t' \in \mathbb{R} \\ z = 3t' - 2 \end{cases}$$

$G(0; 2; -2) \in D'$ obtenu avec $t = 0$
$H(3; 3; 1) \in D'$ obtenu avec $t = 1$

Considérons les vecteurs :

$$\overrightarrow{EF} = \vec{u}\begin{pmatrix} 2 \\ -3 \\ 1 \end{pmatrix} \qquad \overrightarrow{GH} = \vec{v}\begin{pmatrix} 3 \\ 1 \\ 3 \end{pmatrix} \text{ et } \overrightarrow{EG}\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -2 \end{pmatrix}$$

Résolvons :

$$x\overrightarrow{EF} + y\overrightarrow{GH} + z\overrightarrow{EG} = \vec{0}$$

$$\begin{cases} 2x + 3y + z = 0 & (L_1) \\ -3x + y \quad\ = 0 & (L_2) \\ x + 3y - 2z = 0 & (L_3) \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 2x + 3y + z = 0 & (L_1) \\ -3x + y \quad\ = 0 & (L_2) \\ 5x + 9y \quad\ = 0 & (2L_1 + L_2) \end{cases}$$

$$\begin{cases} 2x + 3y + z = 0 & (L_1) \\ -3x + y \quad\ = 0 & (L_2) \\ 5x + 9y \quad\ = 0 & (L_3) \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 2x + 3y + z = 0 & (L_1) \\ -3x + y \quad\ = 0 & (L_2) \\ 32x \quad\ = 0 & (L_3 - 9L_2) \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x = 0 \\ y = 0 \\ z = 0 \end{cases}$$

J'en déduis que $(0; 0; 0)$ est la seule solution. Par conséquent, les vecteurs $\overrightarrow{EF}, \overrightarrow{GH}$ et $\overrightarrow{EG}$ ne sont pas coplanaires.

La proposition 4 est fausse.

5.

Les droites D et D' ne peuvent pas être sécantes car sinon elles seraient coplanaires.

La proposition 5 est fausse.

	6.	La parallèle à D' qui passe par $A(6;-3;5)$ a pour équation paramétrique : $\begin{cases} x = 6+3t' \\ y = -3+t' \\ z = 5+3t' \end{cases}$ où $t' \in \mathbb{R}$ Pour trouver le point d'intersection, résolvons le système : $\begin{cases} 2t-1 = 6+3t' \\ -3t+2 = -3+t' \\ t = 5+3t' \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} t = 5+3t' \\ 10+6t'-1 = 6+3t' \\ -15-9t'+2 = -3+t' \end{cases}$ $\Leftrightarrow \begin{cases} t = 5+3t' \\ 3t' = -3 \\ -10t' = 10 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} t = 5+3t' \\ t' = -\dfrac{3}{3} = -1 \\ t' = \dfrac{10}{-10} = -1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} t = 2 \\ t' = -1 \end{cases}$ Le point d'intersection a donc pour coordonnées $(3;-4;2)$: $D \begin{cases} x = 2\times 2-1 = 3 \\ y = -3\times 2+2 = -4 \\ z = 2 \end{cases}$ ou $\begin{cases} x = 6+3\times(-1) = 3 \\ y = -3-1 = -4 \\ z = 5+3\times(-1) = 2 \end{cases}$