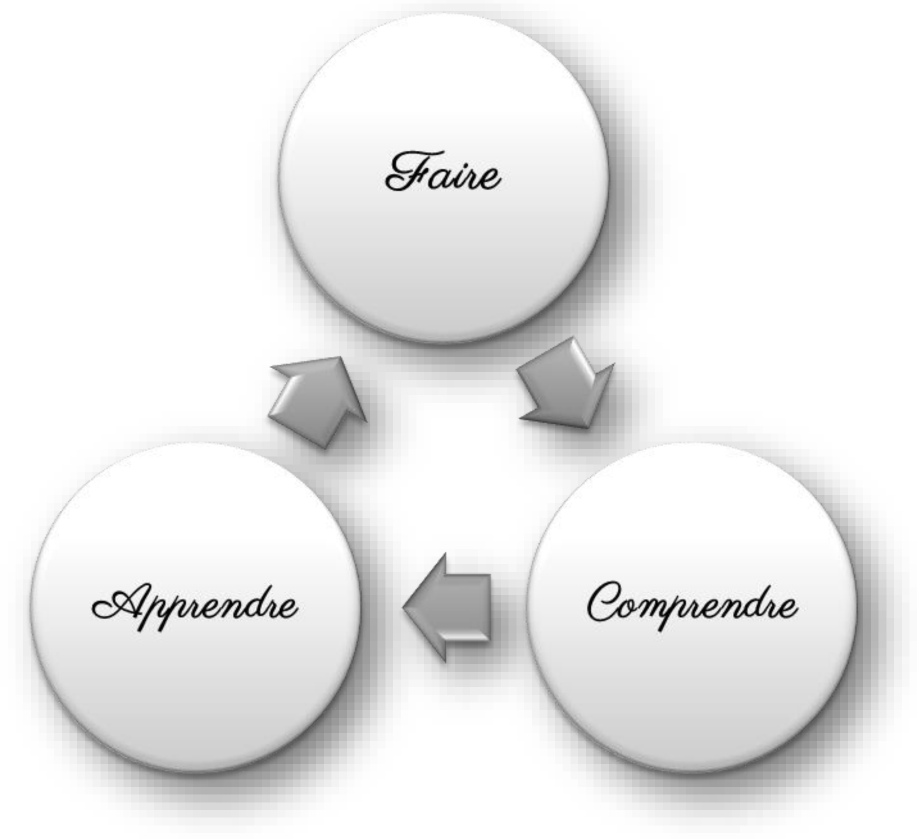


Table des matières

Terminale Préparation Contrôle
Spécialité Mathématiques

Enoncé du sujet

Exercice 1. (6 points)

$ABCDEFGH$ est un cube. I est le milieu de $[CG]$, J celui de $[EH]$ et K vérifie $\overrightarrow{GK} = \frac{1}{3}\overrightarrow{GH}$.

▶ 1a. Exprimer les vecteurs $\overrightarrow{AI}$, $\overrightarrow{AJ}$ et $\overrightarrow{AK}$ en fonction des vecteurs $\overrightarrow{AB}$, $\overrightarrow{AD}$ et $\overrightarrow{AE}$.

b. En déduire qu'il existe deux réels x et y tels que $\overrightarrow{AK} = x\overrightarrow{AI} + y\overrightarrow{AJ}$.

c. Que peut-on en déduire ?

▶ 2. On considère le repère $\left(A; \overrightarrow{AB}; \overrightarrow{AD}; \overrightarrow{AE}\right)$.

a. Déterminer une équation paramétrique de la droite (d) parallèle à (JK) passant par A.

b. Déterminer les coordonnées du point d'intersection L des droites (d) et (BC).

c. Les droites (AL) et (KI) sont-elles sécantes ?

Exercice 2. (7 points)

▶ 1. Ecrire en fonction de $\ln(2)$:

$$\ln(32e) \qquad \ln\left(\sqrt{128}\right) \qquad \ln\left(\frac{\sqrt{e}}{1024}\right)$$

▶ 2. Le taux de rémunération du Livret A est 3%. Les parents d'Ada ont placé un capital sur son livret A à sa naissance en 2005. A quel âge Ada aura-t-elle doublé son capital ?

▶ 3. Résoudre l'équation $2\ln(x) = \ln(2) + \ln(4 - x)$.

▶ 4. Résoudre l'inéquation $\ln(4 - x) \leq 5$.

▶ 5. Résoudre l'équation $2\ln(x) \geq \ln(x + 3) + \ln(2 - x)$.

Exercice 3. (7 points)

Dans l'espace rapporté à un repère orthonormé $\left(O; \vec{\imath}; \vec{\jmath}; \vec{k}\right)$, on considère les points $A(1; 0; 2)$, $B(-2; 4; -1)$, $C(-1; 1; 3)$ et $D(1{,}5, -7)$.

La droite (d) a pour représentation paramétrique : $\begin{cases} x = -7 + 3t \\ y = 9 - 4t \\ z = 3t - 3 \end{cases} \quad t \in \mathbb{R}$

▶ 1. a. Déterminer une représentation paramétrique de la droite (AB).

b. Le point C appartient-il à la droite (d) ?

c. Les droites (AB) et (d) sont-elles parallèles ?

▶ 2. a. Déterminer deux réels α et β tels que $\overrightarrow{AD} = \alpha\overrightarrow{AB} + \beta\overrightarrow{AC}$.

b. Que peut-on en déduire ?

c. Les droites (d) et (AD) sont-elles sécantes ? si oui, déterminer les coordonnées du point d'intersection.

▶ 3. a. Déterminer les coordonnées du point d'intersection entre la droite (d) et le plan (Oxz).

b. En déduire l'intersection entre les plans (ABC) et (Oxz).

Terminale Contrôle

Spécialité Mathématiques

Correction du sujet

Correction de l'exercice 1. (6 points)

$ABCDEFGH$ est un cube. I est le milieu de $[CG]$, J celui de $[EH]$ et K vérifie $\overrightarrow{GK} = \frac{1}{3}\overrightarrow{GH}$.

▶1a. Exprimer les vecteurs $\overrightarrow{AI}$, $\overrightarrow{AJ}$ et $\overrightarrow{AK}$ en fonction des vecteurs $\overrightarrow{AB}$, $\overrightarrow{AD}$ et $\overrightarrow{AE}$.

b. En déduire qu'il existe deux réels x et y tels que $\overrightarrow{AK} = x\overrightarrow{AI} + y\overrightarrow{AJ}$.

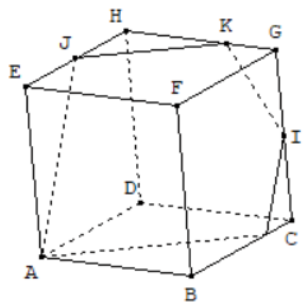
c. Que peut-on en déduire ?

▶2. On considère le repère $\left(A; \overrightarrow{AB}; \overrightarrow{AD}; \overrightarrow{AE}\right)$.

a. Déterminer une équation paramétrique de la droite (d) parallèle à (JK) passant par A.

b. Déterminer les coordonnées du point d'intersection L des droites (d) et (BC).

c. Les droites (AL) et (KI) sont-elles sécantes ?

Exercice 1.	**1a.**	$\overrightarrow{AI} = \overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BC} + \overrightarrow{CI}$ $\overrightarrow{AI} = \overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AD} + \frac{1}{2}\overrightarrow{CG}$ $\overrightarrow{AI} = \overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AD} + \frac{1}{2}\overrightarrow{AE}$  $\overrightarrow{AJ} = \overrightarrow{AE} + \overrightarrow{EJ}$ $\overrightarrow{AJ} = \overrightarrow{AE} + \frac{1}{2}\overrightarrow{EH}$ $\overrightarrow{AJ} = \overrightarrow{AE} + \frac{1}{2}\overrightarrow{AD}$ $\overrightarrow{AK} = \overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BC} + \overrightarrow{CG} + \overrightarrow{GK}$ $\overrightarrow{AK} = \overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AD} + \overrightarrow{AE} + \frac{1}{3}\overrightarrow{GH}$ $\overrightarrow{AK} = \overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AD} + \overrightarrow{AE} - \frac{1}{3}\overrightarrow{AB}$ $\overrightarrow{AK} = \frac{2}{3}\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AD} + \overrightarrow{AE}$
	1b.	$\frac{2}{3}\overrightarrow{AI} = \frac{2}{3}\overrightarrow{AB} + \frac{2}{3}\overrightarrow{AD} + \frac{2}{3} \times \frac{1}{2}\overrightarrow{AE}$ $\frac{2}{3}\overrightarrow{AI} = \frac{2}{3}\overrightarrow{AB} + \frac{2}{3}\overrightarrow{AD} + \frac{1}{3}\overrightarrow{AE}$ $\frac{2}{3}\overrightarrow{AJ} = \frac{2}{3}\overrightarrow{AE} + \frac{2}{3} \times \frac{1}{2}\overrightarrow{AD}$ $\frac{2}{3}\overrightarrow{AJ} = \frac{2}{3}\overrightarrow{AE} + \frac{1}{3}\overrightarrow{AD}$ donc $\frac{2}{3}\overrightarrow{AI} + \frac{2}{3}\overrightarrow{AJ} = \frac{2}{3}\overrightarrow{AB} + \frac{2}{3}\overrightarrow{AD} + \frac{1}{3}\overrightarrow{AE} + \frac{2}{3}\overrightarrow{AE} + \frac{1}{3}\overrightarrow{AD}$ $\frac{2}{3}\overrightarrow{AI} + \frac{2}{3}\overrightarrow{AJ} = \frac{2}{3}\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AD} + \overrightarrow{AE}$ $\frac{2}{3}\overrightarrow{AI} + \frac{2}{3}\overrightarrow{AJ} = \overrightarrow{AK}$
	1c.	On peut déduire que les vecteurs $\overrightarrow{AI}; \overrightarrow{AJ}; \overrightarrow{AK}$ sont coplanaires. Donc, les points A, I, J et K sont coplanaires.

	2a.	$A(0;0;0)$ $J\left(0;\frac{1}{2};1\right)$ $K\left(\frac{2}{3};1;1\right)$ $\overrightarrow{JK}\begin{pmatrix}2/3\\1/2\\0\end{pmatrix}$ Une équation paramétrique est donc : $\begin{cases}x=\frac{2}{3}t\\y=\frac{1}{2}t\\z=0\end{cases}\quad t\in\mathbb{R}$
	2b.	Soit $L(x;y;z)\in(BC)$ donc $x=1$ et $z=0$ De plus, $L(1;y;0)\in(d)$ $\begin{cases}1=\frac{2}{3}t\\y=\frac{1}{2}t\\0=0\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}t=\frac{3}{2}\\y=\frac{3}{4}\end{cases}$ et donc $L\left(1;\frac{3}{4};0\right)$
	2c.	La droite (AL) parallèle à (JK) et passant par A est dans le même plan que la droite (KI). De plus, $\overrightarrow{JK}\begin{pmatrix}\frac{2}{3}\\\frac{1}{2}\\0\end{pmatrix}$ et $I\left(1;1;\frac{1}{2}\right)$ $K\left(\frac{2}{3};1;1\right)$ $\overrightarrow{KI}\begin{pmatrix}\frac{1}{3}\\0\\-\frac{1}{2}\end{pmatrix}$ ne sont pas parallèles car $\frac{1/3}{2/3}\neq\frac{0}{1/2}$ Les droites (AL) et (KI) sont donc sécantes. La droite (AD) a pour représentation paramétrique : $(AL)\begin{cases}x=\frac{2}{3}t\\y=\frac{1}{2}t\\z=0\end{cases}\ t\in\mathbb{R}$ et $(KI)\begin{cases}x=1+\frac{1}{3}t'\\y=1\\z=\frac{1}{2}-\frac{1}{2}t'\end{cases}\ t'\in\mathbb{R}$ $\begin{cases}\frac{2}{3}t=1+\frac{1}{3}t'\\\frac{1}{2}t=1\\0=\frac{1}{2}-\frac{1}{2}t'\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}t=2\\t'=1\end{cases}$ Les droites (AL) et (KI) se coupent au point de coordonnées $\left(\frac{4}{3};1;0\right)$

Correction de l'exercice 2. (7 points)

▶ 1. Ecrire en fonction de $\ln(2)$:

$$\ln(32e) \qquad \ln\left(\sqrt{128}\right) \qquad \ln\left(\frac{\sqrt{e}}{1024}\right)$$

▶ 2. Le taux de rémunération du Livret A est 3%. Les parents d'Ada ont placé un capital sur son livret A à sa naissance en 2005. A quel âge Ada aura-t-elle doublé son capital ?

▶ 3. Résoudre l'équation $2\ln(x) = \ln(2) + \ln(4 - x)$.

▶ 4. Résoudre l'inéquation $\ln(4 - x) \leq 5$.

▶ 5. Résoudre l'équation $2\ln(x) \geq \ln(x + 3) + \ln(2 - x)$.

Exercice 2.	**1.**	$\ln(32e) = \ln(32) + \ln(e) = \ln(2^5) + 1 = 5\ln(2) + 1$ $\ln\left(\sqrt{128}\right) = \frac{1}{2}\ln(128) = \frac{1}{2}\ln(2^7) = \frac{7}{2}\ln(2)$ $\ln\left(\frac{\sqrt{e}}{1024}\right) = \ln\left(\sqrt{e}\right) - \ln(1024) = \frac{1}{2}\ln(e) - \ln(2^{10}) = \frac{1}{2} - 10\ln(2)$
	2.	Le capital d'Ada suit une progression géométrique de raison 1,03. $1{,}03^n \geq 2$ $\Leftrightarrow \ln(1{,}03^n) \geq \ln(2)$ $\Leftrightarrow n\ \ln(1{,}03) \geq \ln(2)$ $\Leftrightarrow n \geq \dfrac{\ln(2)}{\ln(1{,}03)} \quad \Longrightarrow \quad n \geq 24$ Il faudra donc 24 années pour que le capital soit doublé.
	3.	$2\ln(x) = \ln(2) + \ln(4 - x)$ L'équation est définie pour : $x > 0 \quad \text{et} \quad 4 - x > 0$ $x > 0 \quad \text{et} \quad 4 > x$ L'ensemble de définition est donc $\mathcal{D} =]0; 4[$. $2\ln(x) = \ln(2) + \ln(4 - x)$ $\Longrightarrow \ln(x^2) = \ln\left(2(4 - x)\right)$ $\Longrightarrow x^2 = 8 - 2x$ $\Longrightarrow x^2 + 2x - 8 = 0$ $\Delta = 4 - 4 \times (-8) = 36 > 0$ $x_1 = \dfrac{-2 - \sqrt{36}}{2} = \underbrace{-4}_{\text{exclu}} \quad \text{et} \quad x_2 = \dfrac{-2 + \sqrt{36}}{2} = 2$ L'unique solution de l'équation est donc 2.

4.

$\ln(4-x) \leq 5$

L'ensemble de définition est donc $\mathcal{D} =]-\infty; 4[$.

$$\ln(4-x) \leq 5$$
$$\Leftrightarrow 4 - x \leq e^5$$
$$\Leftrightarrow -x \leq e^5 - 4$$
$$\Leftrightarrow x \geq -(e^5 - 4)$$
$$\Leftrightarrow x \geq 4 - e^5$$

L'ensemble des solutions est donc $[4 - e^5; 4[$.

5.

$2\ln(x) \geq \ln(x+3) + \ln(2-x)$

L'équation est définie pour :

$$x > 0 \quad \text{et} \quad x + 3 > 0 \quad \text{et} \quad 2 - x > 0$$
$$x > 0 \quad \text{et} \quad x > -3 \quad \text{et} \quad 2 > x$$

L'ensemble de définition est donc $\mathcal{D} =]0; 2[$.

$$2\ln(x) \geq \ln(x+3) + \ln(2-x)$$
$$\Longrightarrow \ln(x^2) \geq \ln\big((x+3)(2-x)\big)$$
$$\Longrightarrow x^2 \geq (x+3)(2-x)$$
$$\Longrightarrow x^2 \geq 2x - x^2 + 6 - 3x$$
$$\Longrightarrow 2x^2 + x - 6 \geq 0$$
$$\Delta = 1 - 4 \times (-12) = 49 > 0$$
$$x_1 = \frac{-1 - \sqrt{49}}{4} = -2 \ \text{ et } \ x_2 = \frac{-1 + \sqrt{49}}{4} = \frac{3}{2}$$

De plus, $a = 2 > 0$, donc

x	$-\infty$		-2		$\frac{3}{2}$		$+\infty$
$2x^2+x-6$		$+$	0	$-$	0	$+$	

Mais, l'ensemble de définition est donc $\mathcal{D} =]0; 2[$, donc

x	$-\infty$	-2	0		$\frac{3}{2}$		2	$+\infty$
$f(x)$		0		$-$	0	$+$		

L'ensemble des solutions de l'inéquation est donc $\left[\frac{3}{2}; 2\right[$.

Correction de l'exercice 3. (7 points)

Dans l'espace rapporté à un repère orthonormé $\left(O; \vec{\imath}; \vec{\jmath}; \vec{k}\right)$, on considère les points $A(1; 0; 2)$, $B(-2; 4; -1)$, $C(-1; 1; 3)$ et $D(1,5,-7)$.

La droite (d) a pour représentation paramétrique : $\begin{cases} x = -7 + 3t \\ y = 9 - 4t \quad t \in \mathbb{R} \\ z = 3t - 3 \end{cases}$

▶1. a. Déterminer une représentation paramétrique de la droite (AB).

b. Le point C appartient-il à la droite (d) ?

c. Les droites (AB) et (d) sont-elles parallèles ?

▶2. a. Déterminer deux réels α et β tels que $\overrightarrow{AD} = \alpha\overrightarrow{AB} + \beta\overrightarrow{AC}$.

b. Que peut-on en déduire ?

c. Les droites (d) et (AD) sont-elles sécantes ? si oui, déterminer les coordonnées du point d'intersection.

▶3. a. Déterminer les coordonnées du point d'intersection entre la droite (d) et le plan (Oxz).

b. En déduire l'intersection entre les plans (ABC) et (Oxz).

Exercice 3.	**1a.**	$A(1;0;2) \quad B(-2;4;-1) \quad \overrightarrow{AB}\begin{pmatrix}-3\\4\\-3\end{pmatrix}$ Une équation paramétrique de (AB) est donc $\begin{cases} x = 1 - 3t \\ y = 4t \quad t \in \mathbb{R} \\ z = 2 - 3t \end{cases}$
	1b.	$C(-1;1;3) \qquad \begin{cases} -1 = -7 + 3t \\ 1 = 9 - 4t \\ 3 = 3t - 3 \end{cases} \Leftrightarrow t = 2$ donc $C \in (d)$
	1c.	Un vecteur directeur de (d) est $\vec{u}\begin{pmatrix}3\\-4\\3\end{pmatrix}$ or $\vec{u} = -\overrightarrow{AB}$ Les droites (AB) et (d) sont donc parallèles.
	2a.	$A(1;0;2) \quad B(-2;4;-1) \quad C(-1;1;3) \quad D(1,5,-7)$ $\overrightarrow{AD}\begin{pmatrix}0\\5\\-9\end{pmatrix} \quad \overrightarrow{AB}\begin{pmatrix}-3\\4\\-3\end{pmatrix} \quad \overrightarrow{AC}\begin{pmatrix}-2\\1\\1\end{pmatrix}$ $\begin{cases} 0 = -3\alpha - 2\beta \\ 5 = 4\alpha + \beta \\ -9 = -3\alpha + \beta \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \beta = 5 - 4\alpha \\ 0 = -3\alpha - 2\beta \\ -9 = -3\alpha + \beta \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \beta = 5 - 4\alpha \\ 0 = -3\alpha - 10 + 8\alpha \\ -9 = -3\alpha + 5 - 4\alpha \end{cases}$ $\Leftrightarrow \begin{cases} \beta = 5 - 4\alpha \\ 5\alpha = 10 \\ -7\alpha = -14 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \beta = -3 \\ \alpha = 2 \end{cases}$ donc $\overrightarrow{AD} = 2\overrightarrow{AB} - 3\overrightarrow{AC}$
	2b.	On peut alors en déduire que les vecteurs $\overrightarrow{AD}$, $\overrightarrow{AB}$ et $\overrightarrow{AC}$ sont coplanaires et donc que les points A, B, C et D sont coplanaires.

	2c.	La droite (d) parallèle à (AB) et passant par C est dans le même plan que la droite (AD). De plus, $\vec{u}\begin{pmatrix}3\\-4\\3\end{pmatrix}$ et $\overrightarrow{AD}\begin{pmatrix}0\\5\\-9\end{pmatrix}$ ne sont pas parallèles car $\frac{0}{3}\neq\frac{5}{-4}\neq-\frac{9}{3}$ Les droites (d) et (AD) sont donc sécantes. La droite (AD) a pour représentation paramétrique : $$\begin{cases} x=1 \\ y=5t' \quad t'\in\mathbb{R} \\ z=2-9t' \end{cases}$$
	2c.	$$\begin{cases} -7+3t=1 \\ 9-4t=5t' \\ 3t-3=2-9t' \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} t=\frac{8}{3} \\ 5t'=-\frac{5}{3} \\ -9t'=3 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} t=\frac{8}{3} \\ t'=-\frac{1}{3} \end{cases}$$ Les droites (d) et (AD) se coupent donc au point $\left(1;-\frac{5}{3};5\right)$.
	3a.	Soit $M(x;y;z)\in(Oxz)$ donc $y=0$ De plus, $M(x;0;z)\in(d)$ $$\begin{cases} x=-7+3t \\ 0=9-4t \\ z=3t-3 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} t=\frac{9}{4} \\ x=-7+3\times\frac{9}{4}=-\frac{1}{4} \\ z=3\times\frac{9}{4}-3=\frac{15}{4} \end{cases} \quad \text{donc } M\left(-\frac{1}{4};0;\frac{15}{4}\right)$$
	3b.	On observe que $A(1;0;2)\in(Oxz)$ L’intersection entre 2 plans étant une droite, j’en déduis que l’intersection entre les plans (ABC) et (Oxz) est la droite (AM).