Révision Fonctions – Equations différentielles
Terminale ➡ Préparation du Contrôle
Spécialité Mathématiques

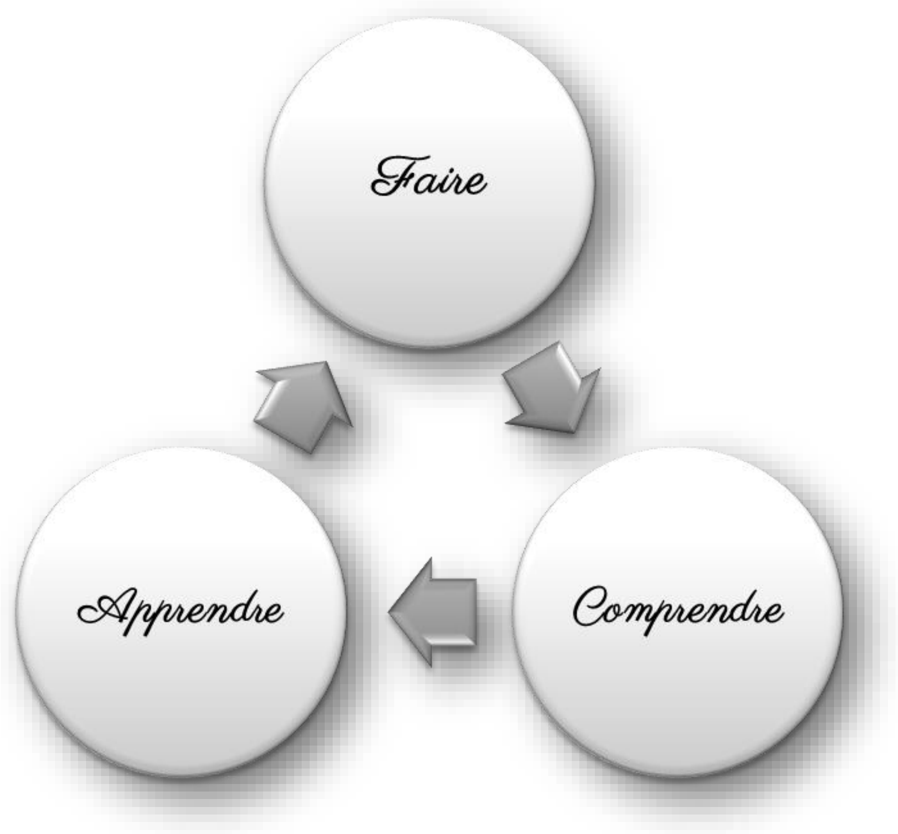


Table des matières

Terminale ➡ Préparation du Contrôle

Spécialité Mathématiques

Enoncé du sujet

Exercice 1. (8 points)

PARTIE A :

On considère la fonction f définie sur $]-3;+\infty[$ par $f(x) = \dfrac{\ln(x+3)}{x+3}$.

▶1. Déterminer les limites de la fonction f aux bornes de son ensemble de définition. La courbe représentative de f admet-elle des asymptotes ?

▶2. a) Démontrer que $f'(x) = \dfrac{1-\ln(x+3)}{(x+3)^2}$.

b) Dresser, en justifiant, le tableau de variations de la fonction f.

▶3. Calculer $f(-2)$, en déduire le signe de la fonction f sur $]-3;+\infty[$.

PARTIE B :

On considère la fonction F définie sur $]-3;+\infty[$ par $F(x) = (\ln(x+3))^2$.

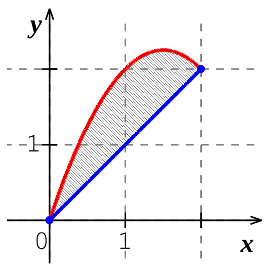
▶1. Déterminer les limites de la fonction F aux bornes de son ensemble de définition. La courbe représentative de F admet-elle des asymptotes ?

▶2. En vous aidant de la partie A, étudier les variations de la fonction F et dresser son tableau de variations.

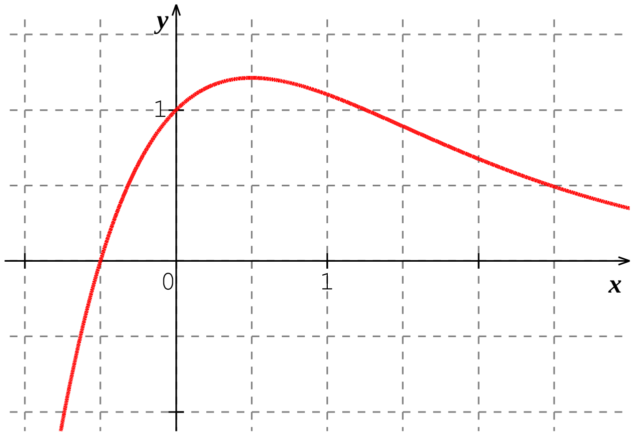
PARTIE C : Démontrer que la valeur moyenne de f sur l'intervalle $[0;6]$ est égale à $\dfrac{(\ln(3))^2}{4}$.

Exercice 2. (4 points)

▶1. On considère les deux fonctions f et g définies et continues sur $[0\,;2]$ respectivement par $f(x) = -x^2 + 3x$ et $g(x) = x$.



Déterminer la valeur exacte de l'aire, exprimée en unité d'aire, située entre les courbes représentatives de ces deux fonctions.



▶2. A l'aide d'une intégration par parties, détermine la valeur exacte de l'intégrale puis hachurer la zone qu'elle représente sur le graphique ci-contre :

$$L = \int_0^1 (2x+1)e^{-x}dx$$

Exercice 3. (8 points)

Cet exercice propose l'étude de la contamination accidentelle d'un cours d'eau par un polluant.

Partie A. Résolution d'une équation différentielle

On considère l'équation différentielle $(E)\ \ y' + 0{,}25y = 3e^{-t}$ où y est une fonction de la variable réelle t, définie et dérivable sur l'intervalle $[0;+\infty[$.

▶1. Déterminer les solutions sur l'intervalle $[0\,;+\infty[$ de l'équation différentielle $(E_0)\ \ y' + 0{,}25y = 0$.

▶2. Soit h la fonction définie sur l'intervalle $[0;+\infty[$ par : $h(t) = -4e^{-t}$.

Démontrer que h est une solution particulière de l'équation différentielle (E).

▶3. Démontrer que la fonction f est solution de l'équation différentielle (E) si, et seulement si, la fonction $(f-h)$ est solution de l'équation différentielle (E_0).

▶4. En déduire l'ensemble des solutions de l'équation différentielle (E).

▶5. Déterminer la solution f de l'équation différentielle (E) qui vérifie la condition initiale $f(0) = 75$.

Partie B. Étude d'une fonction

Soit f la fonction définie sur l'intervalle $[0;+\infty[$ par $f(t)=79e^{-0{,}25t}-4e^{-t}$.

On désigne par $\mathscr{C}$ la courbe représentative de la fonction f dans un repère orthogonal.

▶1. Déterminer la limite de la fonction f en $+\infty$. Que peut-on en déduire pour la courbe $\mathscr{C}$?

▶2a. Démontrer que la dérivée de f peut s'écrire $f'(t)=e^{-0{,}25t}(-19{,}75+4e^{-0{,}75\,t})$ pour tout t dans l'intervalle $[0;+\infty[$.

b. En déduire le sens de variation de la fonction f sur l'intervalle $[0;+\infty[$.

c. Démontrer que l'équation $f(t)=7{,}5$ admet une unique solution sur $[0;+\infty[$. On donnera une valeur approchée au dixième.

▶3a. Démontrer que la valeur moyenne de la fonction f sur l'intervalle $[0;20]$ est

$$V_m=\frac{1}{20}(-316e^{-5}+4e^{-20}+312)$$

b. Donner la valeur approchée de V_m arrondie au dixième.

Partie C. Exploitation des résultats

On admet que, t semaines après la contamination, la concentration de polluant dans l'eau, exprimée en milligramme par litre, est $\frac{1}{3}f(t)$, où f est la fonction étudiée dans la partie B.

▶1. La baignade est sans danger lorsque la concentration de polluant dans l'eau est inférieure ou égale à 2,5 milligrammes par litre. Au bout de combien de semaines, la baignade sera-t-elle sans danger ?

▶2. Quelle est la valeur moyenne, au cours des 20 semaines suivant la contamination, de la concentration de polluant dans l'eau ?

🡅

Terminale ➡ Préparation du Contrôle

Spécialité Mathématiques

Correction du sujet

Correction de l'exercice 1. (8 points)

PARTIE A :

On considère la fonction f définie sur $]-3;+\infty[$ par $f(x) = \dfrac{\ln(x+3)}{x+3}$.

▶ 1. Déterminer les limites de la fonction f aux bornes de son ensemble de définition. La courbe représentative de f admet-elle des asymptotes ?

▶ 2. a) Démontrer que $f'(x) = \dfrac{1-\ln(x+3)}{(x+3)^2}$.

b) Dresser, en justifiant, le tableau de variations de la fonction f.

▶ 3. Calculer $f(-2)$, en déduire le signe de la fonction f sur $]-3;+\infty[$.

PARTIE B :

On considère la fonction F définie sur $]-3;+\infty[$ par $F(x) = (\ln(x+3))^2$.

▶ 1. Déterminer les limites de la fonction F aux bornes de son ensemble de définition. La courbe représentative de F admet-elle des asymptotes ?

▶ 2. En vous aidant de la partie A, étudier les variations de la fonction F et dresser son tableau de variations.

PARTIE C : Démontrer que la valeur moyenne de f sur l'intervalle $[0;6]$ est égale à $\dfrac{(\ln(3))^2}{4}$.

Exercice 1.	**A1.**	$\left.\begin{array}{l}\lim\limits_{x\to-3^+}\ln(x+3)=-\infty\\ \lim\limits_{x\to-3^+}x+3=0^+\end{array}\right\}$ donc, par quotient, $\lim\limits_{x\to-3^+}f(x)=-\infty$ La droite $x=-3$ est donc une asymptote verticale à la courbe. $\left.\begin{array}{l}\lim\limits_{x\to+\infty}\ln(x+3)=+\infty\\ \lim\limits_{x\to+\infty}x+3=+\infty\end{array}\right\}$ FI, par quotient or $\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{\ln(x)}{x}=0$ donc puisque, $\lim\limits_{x\to+\infty}x+3=+\infty$ alors $\lim\limits_{x\to+\infty}f(x)=0$ La droite $y=0$ est donc une asymptote horizontale en $+\infty$ à la courbe.
	A2a.	$\forall x\in]-3;+\infty[\,,\ f(x)=\dfrac{\ln(x+3)}{x+3}$ f est dérivable sur $]-3;+\infty[$ $\forall x\in]-3;+\infty[$, $f'(x)=\dfrac{(x+3)\times\frac{1}{x+3}-1\times\ln(x+3)}{(x+3)^2}$ $f'(x)=\dfrac{1-\ln(x+3)}{(x+3)^2}$

A2b.

$$f'(x) > 0 \Leftrightarrow 1 - \ln(x+3) > 0 \ \text{ car } (x+3)^2 > 0$$
$$\Leftrightarrow -\ln(x+3) > -1$$
$$\Leftrightarrow \ln(x+3) < 1$$
$$\Leftrightarrow x + 3 < e^1$$
$$\Leftrightarrow x < e - 3$$

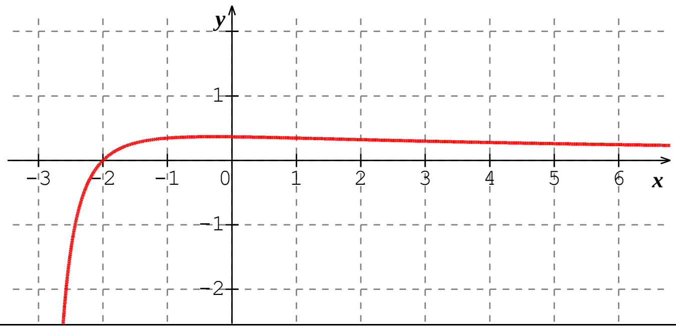
x	-3		$e-3$		$+\infty$
$f'(x)$	‖	$+$	0	$-$	
$f(x)$	‖ $-\infty$	$\nearrow$	$\frac{1}{e}$	$\searrow$	0

$$f(e-3) = \frac{\ln(e-3+3)}{e-3+3} = \frac{\ln(e)}{e} = \frac{1}{e}$$

A3.

$$f(-2) = \frac{\ln(-2+3)}{-2+3} = \frac{\ln(1)}{1} = 0$$

x	-3		-2		$+\infty$
$f(x)$	‖	$-$	0	$+$	



B1.

$\lim\limits_{x \to -3^+} \ln(x+3) = -\infty$ donc, par produit, $\lim\limits_{x \to -3^+} F(x) = +\infty$

La droite $x = -3$ est donc une asymptote verticale à la courbe.

$\lim\limits_{x \to +\infty} \ln(x+3) = +\infty$ donc, par produit, $\lim\limits_{x \to +\infty} F(x) = +\infty$

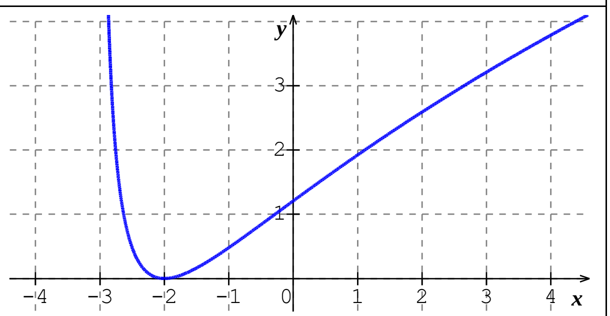
B2.

$\forall x \in \,]-3; +\infty[\,,\ \ F(x) = (\ln(x+3))^2$

F est dérivable sur $]-3; +\infty[$

$\forall x \in \,]-3; +\infty[$,

$$F'(x) = 2 \times \ln(x+3) \times \frac{1}{x+3}$$
$$= 2 \times \frac{\ln(x+3)}{x+3} = 2f(x)$$



D'après la partie A3.,

x	-3		-2		$+\infty$
$F'(x)$	‖	$-$	0	$+$	
$F(x)$	‖ $+\infty$	$\searrow$	0	$\nearrow$	$+\infty$

$F(-2) = (\ln(-2+3))^2 = (\ln(1))^2 = 0$

<table>
<tr>
<td></td>
<td>C.</td>
<td>

$\forall x \in]-3;+\infty[, F'(x) = 2f(x)$

Donc $\frac{1}{2}F$ est une primitive de f.

La valeur moyenne de f sur l'intervalle $[0;6]$ vaut :

$V_m(f) = \frac{1}{6}\int_0^6 f(x)dx$

$V_m(f) = \frac{1}{6}\left[\frac{1}{2}F(x)\right]_0^6$

$V_m(f) = \frac{1}{6}\left[\frac{1}{2}\times(\ln(x+3))^2\right]_0^6$

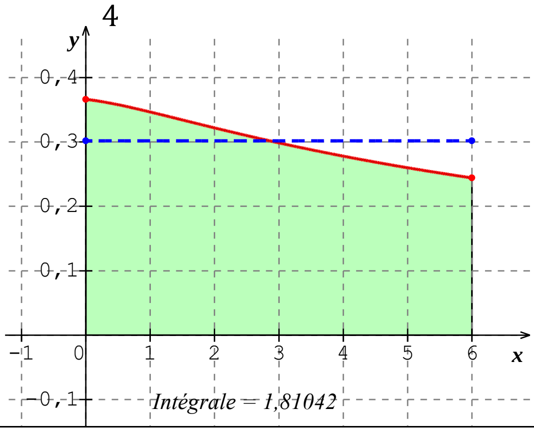
$V_m(f) = \frac{1}{12}((\ln(6+3))^2 - (\ln(0+3))^2)$

$V_m(f) = \frac{1}{12}((\ln(9))^2 - (\ln(3))^2)$

$V_m(f) = \frac{1}{12}((2\ \ln(3))^2 - (\ln(3))^2)$

$V_m(f) = \frac{1}{12}(4(\ln(3))^2 - (\ln(3))^2) = \frac{(\ln(3))^2}{4}$

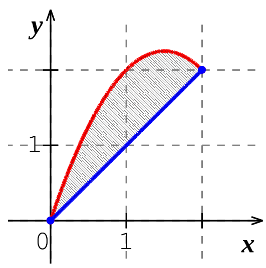
$V_m(f) = \frac{1}{12}\times 3(\ln(3))^2 = \frac{(\ln(3))^2}{4}$



</td>
</tr>
</table>

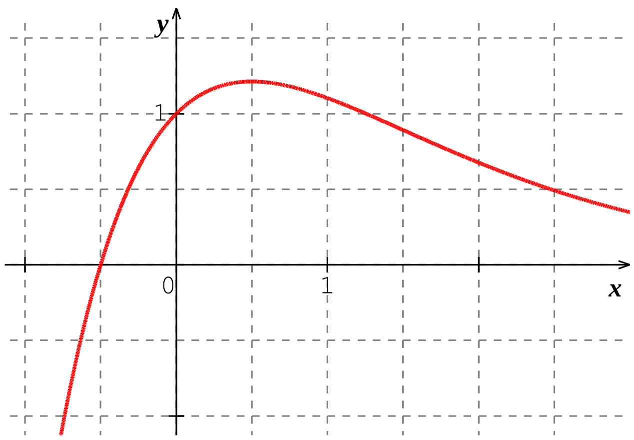
Correction de l'exercice 2. (4 points)

▶1. On considère les deux fonctions f et g définies et continues sur $[0\ ;2]$ respectivement par $f(x) = -x^2+3x$ et $g(x) = x$.
Déterminer la valeur exacte de l'aire, exprimée en unité d'aire, située entre les courbes représentatives de ces deux fonctions.



▶2. A l'aide d'une intégration par parties, détermine la valeur exacte de l'intégrale puis hachurer la zone qu'elle représente sur le graphique ci-contre :

$L = \int_0^1 (2x+1)e^{-x}dx$

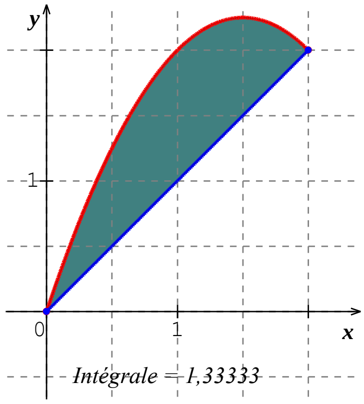


Exercice 2.

1.

On veut calculer

$$\int_0^2 f(x)dx - \int_0^2 g(x)dx$$



$$\begin{aligned}\int_0^2 f(x)dx - \int_0^2 g(x)dx &= \int_0^2 (-x^2+3x)dx - \int_0^2 xdx\\ &= \int_0^2 (-x^2+3x-x)dx\\ &= \int_0^2 (-x^2+2x)dx\\ &= \left[-\frac{x^3}{3}+x^2\right]_0^2\\ &= -\frac{2^3}{3}+2^2-0\\ &= \frac{-8}{3}+4\\ &= \frac{-8+12}{3}\\ &= \frac{4}{3}\end{aligned}$$

2.

$$L = \int_0^1 (2x+1)e^{-x}dx = \int \boldsymbol{u'v}$$

$$u' = e^{-x} \qquad u = -e^{-x}$$
$$v = 2x+1 \qquad v' = 2$$

$$L = \int_0^1 (2x+1)e^{-x}dx = [\boldsymbol{u\,v}] - \int \boldsymbol{u\,v'} = [(2x+1)(-e^{-x})]_0^1 - \int_0^1 2(-e^{-x})dx$$

$$L = [-(2x+1)e^{-x}]_0^1 + \int_0^1 2e^{-x}dx$$

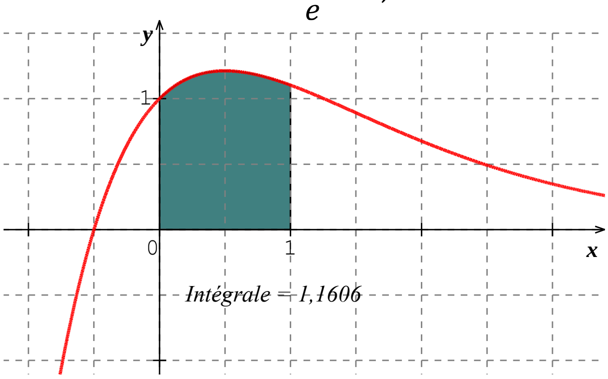
$$L = -(2+1)e^{-1} + (0+1)e^0 + [2(-e^{-x})]_0^1$$

$$L = -\frac{3}{e} + 1 + [-2e^{-x}]_0^1$$

$$L = -\frac{3}{e} + 1 - 2e^{-1} + 2e^0$$

$$L = -\frac{3}{e} + 1 - \frac{2}{e} + 2$$

$$L = 3 - \frac{5}{e} \approx 1{,}16$$



Correction de l'exercice 3. (8 points)

Cet exercice propose l'étude de la contamination accidentelle d'un cours d'eau par un polluant.

Partie A. Résolution d'une équation différentielle

On considère l'équation différentielle (E) $y' + 0{,}25y = 3e^{-t}$ où y est une fonction de la variable réelle t, définie et dérivable sur l'intervalle $[0; +\infty[$.

▶1. Déterminer les solutions sur l'intervalle $[0 ; +\infty[$ de l'équation différentielle (E_0) $y' + 0{,}25y = 0$.

▶2. Soit h la fonction définie sur l'intervalle $[0; +\infty[$ par : $h(t) = -4e^{-t}$.
Démontrer que h est une solution particulière de l'équation différentielle (E).

▶3. Démontrer que la fonction f est solution de l'équation différentielle (E) si, et seulement si, la fonction $(f - h)$ est solution de l'équation différentielle (E_0).

▶4. En déduire l'ensemble des solutions de l'équation différentielle (E).

▶5. Déterminer la solution f de l'équation différentielle (E) qui vérifie la condition initiale $f(0) = 75$.

Partie B. Étude d'une fonction

Soit f la fonction définie sur l'intervalle $[0; +\infty[$ par $f(t) = 79e^{-0{,}25t} - 4e^{-t}$.
On désigne par $\mathscr{C}$ la courbe représentative de la fonction f dans un repère orthogonal.

▶1. Déterminer la limite de la fonction f en $+\infty$. Que peut-on en déduire pour la courbe $\mathscr{C}$?

▶2a. Démontrer que la dérivée de f peut s'écrire $f'(t) = e^{-0{,}25t}(-19{,}75 + 4e^{-0{,}75\,t})$ pour tout t dans l'intervalle $[0; +\infty[$.

b. En déduire le sens de variation de la fonction f sur l'intervalle $[0; +\infty[$.

c. Démontrer que l'équation $f(t) = 7{,}5$ admet une unique solution sur $[0; +\infty[$. On donnera une valeur approchée au dixième.

▶3a. Démontrer que la valeur moyenne de la fonction f sur l'intervalle $[0; 20]$ est

$$V_m = \frac{1}{20}(-316e^{-5} + 4e^{-20} + 312)$$

b. Donner la valeur approchée de V_m arrondie au dixième.

Partie C. Exploitation des résultats

On admet que, t semaines après la contamination, la concentration de polluant dans l'eau, exprimée en milligramme par litre, est $\frac{1}{3}f(t)$, où f est la fonction étudiée dans la partie B.

▶1. La baignade est sans danger lorsque la concentration de polluant dans l'eau est inférieure ou égale à 2,5 milligrammes par litre. Au bout de combien de semaines, la baignade sera-t-elle sans danger ?

▶2. Quelle est la valeur moyenne, au cours des 20 semaines suivant la contamination, de la concentration de polluant dans l'eau ?

Exercice 2.	**A1.**	$$y' + 0{,}25y = 0$$ $$\Leftrightarrow y' = -0{,}25y$$ L'équation différentielle (E_0) a donc pour solution les fonctions $y(t) = Ce^{-0{,}25t}$ où C est une constante réelle.
	A2.	$\forall t \in [0; +\infty[,\ \ h(t) = -4e^{-t}$ La fonction h est dérivable sur $[0; +\infty[$ $$\forall t \in [0; +\infty[,\ \ h'(t) = -4 \times (-e^{-t}) = 4e^{-t}$$ $\forall t \in [0; +\infty[$, $h'(t) + 0{,}25 \times h(t) = 4e^{-t} + 0{,}25 \times (-4e^{-t}) = 4e^{-t} - e^{-t} = 3e^{-t}$ h est donc une solution particulière de l'équation différentielle (E)

	A3.	Je suppose que la fonction f est solution de l'équation différentielle (E) $$\text{donc } f' + 0{,}25f = 3e^{-t}$$ $(f-h)' = f' - h'$ $(f-h)' = 3e^{-t} - 0{,}25f - (3e^{-t} - 0{,}25h)$ $(f-h)' = 3e^{-t} - 0{,}25f - 3e^{-t} + 0{,}25h$ $(f-h)' = -0{,}25(f-h)$ donc la fonction $(f-h)$ est solution de l'équation différentielle (E_0) Réciproquement, je suppose que la fonction $(f-h)$ est solution de l'équation différentielle (E_0) $$\text{donc } (f-h)' = -0{,}25(f-h)$$ $$f' - h' = -0{,}25f + 0{,}25h$$ $$f' = h' - 0{,}25f + 0{,}25h$$ $$\Leftrightarrow f' + 0{,}25f = h' + 0{,}25h$$ $$\Leftrightarrow f' + 0{,}25f = 3e^{-t}$$ donc la fonction f est solution de l'équation différentielle (E)
	A4.	$\forall t \in [0;+\infty[,\ \ (f-h)(t) = Ce^{-0{,}25t}$ $f(t) - h(t) = Ce^{-0{,}25t}$ $\Leftrightarrow f(t) = h(t) + Ce^{-0{,}25t}$ $$\Leftrightarrow f(t) = Ce^{-0{,}25t} - 4e^{-t}$$
	A5.	$$f(0) = 75 = Ce^0 - 4e^0$$ $$\Leftrightarrow 75 = C - 4$$ $$\Leftrightarrow C = 79$$ $$\boldsymbol{\forall t \in [0;+\infty[,\ \ f(t) = 79e^{-0{,}25t} - 4e^{-t}}$$
	B1.	$\left.\begin{array}{l}\lim\limits_{t\to+\infty} e^{-0{,}25\,t} = 0\\ \lim\limits_{t\to+\infty} e^{-t} = 0\end{array}\right\}$ donc, $\lim\limits_{t\to+\infty} f(t) = 0$ La courbe $\mathscr{C}$ admet donc la droite $y = 0$ pour asymptote horizontale en $+\infty$.
	B2a.	$\forall t \in [0;+\infty[,\ \ f(t) = 79e^{-0{,}25t} - 4e^{-t}$ f est dérivable sur $[0;+\infty[$ $f'(t) = 79 \times (-0{,}25 \times e^{-0{,}25t}) - 4 \times (-e^{-t})$ $f'(t) = -19{,}75\, e^{-0{,}25t} + 4e^{-t}$ $f'(t) = e^{-0{,}25t}\left(-19{,}75 + 4\dfrac{e^{-t}}{e^{-0{,}25t}}\right)$ $f'(t) = e^{-0{,}25t}(-19{,}75 + 4\, e^{-t+0{,}25t})$ $f'(t) = e^{-0{,}25t}(-19{,}75 + 4\, e^{-0{,}75\,t})$

B2b.

$$f'(t) > 0$$
$$\Leftrightarrow\ e^{-0,25t}(-19,75 + 4\,e^{-0,75\,t}) > 0$$
$$\Leftrightarrow -19,75 + 4\,e^{-0,75\,t} > 0 \ \text{ car } \ e^{-0,25t} > 0$$
$$\Leftrightarrow 4\,e^{-0,75\,t} > 19,75$$
$$\Leftrightarrow e^{-0,75\,t} > \frac{19,75}{4}$$
$$\Leftrightarrow e^{-0,75\,t} > 4,9375$$
$$\Leftrightarrow -0,75\,t > \ln(4,9375)$$
$$\Leftrightarrow t < \frac{\ln(4,9375)}{-0,75}$$
$$\text{or } \ \frac{\ln(4,9375)}{-0,75} \approx -2,12 < 0$$

donc $\forall t \in [0; +\infty[, \ \ f'(t) < 0$

t	$0 \qquad +\infty$
$f'(t)$	$-$
$f(t)$	$75 \searrow 0$

B2c.

La fonction f est continue car dérivable sur $[0; +\infty[$

$f(0) = 75 > 7,5$

$\lim\limits_{t \to +\infty} f(t) = 0 < 7,5$

D'après le théorème des valeurs intermédiaires, l'équation $f(t) = 7,5$ admet donc au moins une solution sur $[0; +\infty[$.

De plus, la fonction f est strictement décroissante sur $[0; +\infty[$, la solution à l'équation $f(t) = 7,5$ est donc unique.

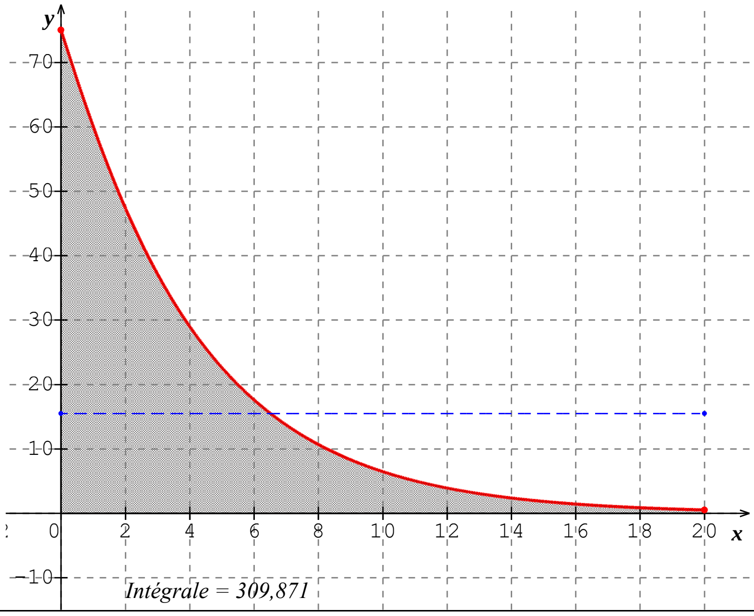
$$f(9,41) \approx 7,515 \quad \text{et} \quad f(9,42) \approx 7,496$$

La solution vaut donc environ 9,4.

B3a.

La valeur moyenne de la fonction f sur l'intervalle $[0; 20]$ est

$$V_m = \frac{1}{20}\int_0^{20} f(t)dt$$
$$V_m = \frac{1}{20}\int_0^{20} (79e^{-0,25t} - 4e^{-t})dt$$
$$V_m = \frac{1}{20}\left[79 \times \frac{e^{-0,25t}}{-0,25} - 4 \times (-e^{-t})\right]_0^{20}$$
$$V_m = \frac{1}{20}[-316e^{-0,25t} + 4e^{-t}]_0^{20}$$
$$V_m = \frac{1}{20}\left(-316e^{-0,25\times 20} + 4e^{-20} - (-316e^{0} + 4e^{0})\right)$$
$$V_m = \frac{1}{20}(-316e^{-5} + 4e^{-20} + 316 - 4)$$
$$V_m = \frac{1}{20}(-316e^{-5} + 4e^{-20} + 312)$$

	B3b.	$V_m = \dfrac{1}{20}(-316e^{-5} + 4e^{-20} + 312) \approx 15{,}49 \approx 15{,}5$ 
	C1.	$\frac{1}{3}f(t) \leq 2{,}5$ $\Leftrightarrow f(t) \leq 2{,}5 \times 3$ $\Leftrightarrow f(t) \leq 7{,}5$ D'après la question B2c. la baignade sera donc sans dans danger au bout de 9,4 semaines environ.
	C2.	$V_m = \dfrac{1}{20}\displaystyle\int_0^{20} f(t)dt = \dfrac{1}{20}(-316e^{-5} + 4e^{-20} + 312)$ $\dfrac{1}{20}\displaystyle\int_0^{20} \dfrac{1}{3}f(t)dt = \dfrac{1}{3} \times V_m = \dfrac{1}{60} \times (-316e^{-5} + 4e^{-20} + 312) \approx \dfrac{15{,}49}{3} \approx 5{,}2$ La valeur moyenne, au cours des 20 semaines suivant la contamination, de la concentration de polluant dans l'eau est 5,2 mg/L.