Terminale Spécialité Mathématiques
Tâche n° 2
Démontrer qu'une suite est arithmétique

Table des matières

Tâche n° $\boxed{2}$
Démontrer qu'une suite est arithmétique
Enoncé des exercices

Exercice 1.

La suite (u_n) est définie, pour tout $n \in \mathbb{N}$, par

$$u_{n+1} = 8 - \frac{16}{u_n} \text{ et } u_0 = 1.$$

On pose, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $v_n = \frac{1}{u_n - 4}$.

▸1. Démontrer que la suite (v_n) est arithmétique.

▸2. En déduire une expression de v_n en fonction de n, puis une expression de u_n en fonction de n.

↑

Exercice 2.

La suite (u_n) est définie, pour tout $n \in \mathbb{N}$, par

$$u_{n+1} = 10 - \frac{25}{u_n} \text{ et } u_0 = 3.$$

On pose, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $v_n = \frac{1}{u_n - 5}$.

▸1. Démontrer que la suite (v_n) est arithmétique.

▸2. En déduire une expression de v_n en fonction de n, puis une expression de u_n en fonction de n.

↑

Exercice 3.

La suite (u_n) est définie, pour tout $n \in \mathbb{N}$, par

$$u_{n+1} = \frac{6u_n - 1}{9u_n} \text{ et } u_0 = 1.$$

On pose, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $v_n = \frac{3}{3u_n - 1}$.

▸1. Démontrer que la suite (v_n) est arithmétique.

▸2. En déduire une expression de v_n en fonction de n, puis une expression de u_n en fonction de n.

↑

Tâche n° $\boxed{2}$
Démontrer qu'une suite est arithmétique
Correction des exercices

Correction de l'exercice 1.

La suite (u_n) est définie, pour tout $n \in \mathbb{N}$, par $u_{n+1} = 8 - \frac{16}{u_n}$ et $u_0 = 1$.

On pose, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $v_n = \frac{1}{u_n - 4}$.

▶ 1. Démontrer que la suite (v_n) est arithmétique.

▶ 2. En déduire une expression de v_n en fonction de n, puis une expression de u_n en fonction de n.

↑

Exercice 1.	**1.**	Démontrer que la suite (v_n) est arithmétique. Soit $n \in \mathbb{N}$ $v_{n+1} - v_n = \dfrac{1}{u_{n+1} - 4} - \dfrac{1}{u_n - 4}$ $v_{n+1} - v_n = \dfrac{1}{8 - \frac{16}{u_n} - 4} - \dfrac{1}{u_n - 4}$ $v_{n+1} - v_n = \dfrac{1}{4 - \frac{16}{u_n}} - \dfrac{1}{u_n - 4}$ $v_{n+1} - v_n = \dfrac{1}{\frac{4u_n}{u_n} - \frac{16}{u_n}} - \dfrac{1}{u_n - 4}$ $v_{n+1} - v_n = \dfrac{1}{\frac{4u_n - 16}{u_n}} - \dfrac{1}{u_n - 4}$ $v_{n+1} - v_n = 1 \times \dfrac{u_n}{4u_n - 16} - \dfrac{1}{u_n - 4}$ $v_{n+1} - v_n = \dfrac{u_n}{4u_n - 16} - \dfrac{4 \times 1}{4 \times (u_n - 4)}$ $v_{n+1} - v_n = \dfrac{u_n}{4u_n - 16} - \dfrac{4}{4u_n - 16}$ $v_{n+1} - v_n = \dfrac{u_n - 4}{4u_n - 16}$ $v_{n+1} - v_n = \dfrac{u_n - 4}{4 \times (u_n - 4)}$ $v_{n+1} - v_n = \dfrac{1}{4}$ Donc la suite (v_n) est arithmétique de raison $\frac{1}{4}$ et $v_0 = \frac{1}{u_0 - 4} = \frac{1}{1-4} = -\frac{1}{3}$

	2.	La suite (v_n) étant arithmétique de raison $\frac{1}{4}$ et $v_0 = -\frac{1}{3}$ On en déduit que, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $$v_n = v_0 + n \times q = -\frac{1}{3} + n \times \frac{1}{4} = -\frac{1}{3} + \frac{n}{4}$$ Or, soit $n \in \mathbb{N}$, $v_n = \frac{1}{u_n - 4}$ $$\Leftrightarrow \frac{1}{v_n} = u_n - 4$$ $$\Leftrightarrow \frac{1}{v_n} + 4 = u_n$$ On a donc, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $$u_n = \frac{1}{v_n} + 4 = \frac{1}{-\frac{1}{3} + \frac{n}{4}} + 4$$ $$u_n = \frac{1}{-\frac{4}{12} + \frac{3n}{12}} + 4$$ $$u_n = \frac{1}{\frac{-4+3n}{12}} + 4$$ $$u_n = \frac{12}{-4+3n} + 4$$

Correction de l'exercice 2.

La suite (u_n) est définie, pour tout $n \in \mathbb{N}$, par $u_{n+1} = 10 - \frac{25}{u_n}$ et $u_0 = 3$.

On pose, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $v_n = \frac{1}{u_n - 5}$.

▸1. Démontrer que la suite (v_n) est arithmétique.

▸2. En déduire une expression de v_n en fonction de n, puis une expression de u_n en fonction de n.

Exercice 2.	**1.**	Démontrer que la suite (v_n) est arithmétique. Soit $n \in \mathbb{N}$ $v_{n+1} - v_n = \dfrac{1}{u_{n+1} - 5} - \dfrac{1}{u_n - 5}$ $v_{n+1} - v_n = \dfrac{1}{10 - \dfrac{25}{u_n} - 5} - \dfrac{1}{u_n - 5}$ $v_{n+1} - v_n = \dfrac{1}{5 - \dfrac{25}{u_n}} - \dfrac{1}{u_n - 5}$ $v_{n+1} - v_n = \dfrac{1}{\dfrac{5u_n - 25}{u_n}} - \dfrac{1}{u_n - 5}$ $v_{n+1} - v_n = \dfrac{u_n}{5u_n - 25} - \dfrac{5}{(u_n - 5) \times 5}$ $v_{n+1} - v_n = \dfrac{u_n - 5}{(u_n - 5) \times 5} = \dfrac{1}{5}$ Donc la suite (v_n) est arithmétique de raison $\frac{1}{5}$ et $v_0 = \frac{1}{u_0 - 5} = \frac{1}{3-5} = -\frac{1}{2}$

	2.	On en déduit que, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $v_n = -\frac{1}{2} + n \times \frac{1}{5} = -\frac{1}{2} + \frac{n}{5} = \frac{-5}{10} + \frac{2n}{10} = \frac{2n-5}{10}$ Or, soit $n \in \mathbb{N}$, $v_n = \frac{1}{u_n-5}$ $\Leftrightarrow v_n(u_n-5) = 1$ $\Leftrightarrow u_n - 5 = \dfrac{1}{v_n}$ $\Leftrightarrow u_n = \dfrac{1}{v_n} + 5 = \dfrac{1+5v_n}{v_n}$ On a donc, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $u_n = \dfrac{1+5v_n}{v_n}$ $u_n = \dfrac{1+5\times\dfrac{2n-5}{10}}{\dfrac{2n-5}{10}}$ $u_n = \left(1+\dfrac{2n-5}{2}\right)\times\dfrac{10}{2n-5}$ $u_n = \dfrac{2+2n-5}{2}\times\dfrac{2\times 5}{2n-5}$ $u_n = \dfrac{5(2n-3)}{2n-5}$ $u_n = \dfrac{10n-15}{2n-5}$

Correction de l'exercice 3.

La suite (u_n) est définie, pour tout $n \in \mathbb{N}$, par $u_{n+1} = \frac{6u_n-1}{9u_n}$ et $u_0 = 1$.

On pose, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $v_n = \frac{3}{3u_n-1}$.

▸1. Démontrer que la suite (v_n) est arithmétique.

▸2. En déduire une expression de v_n en fonction de n, puis une expression de u_n en fonction de n.

Exercice 3.	**1.**	Démontrer que la suite (v_n) est arithmétique. Soit $n \in \mathbb{N}$ $v_{n+1} - v_n = \dfrac{3}{3u_{n+1} - 1} - \dfrac{3}{3u_n - 1}$ $v_{n+1} - v_n = \dfrac{3}{3 \times \dfrac{6u_n - 1}{9u_n} - 1} - \dfrac{3}{3u_n - 1}$ $v_{n+1} - v_n = \dfrac{3}{\dfrac{6u_n - 1 - 3u_n}{3u_n}} - \dfrac{3}{3u_n - 1}$ $v_{n+1} - v_n = \dfrac{3 \times 3u_n}{3u_n - 1} - \dfrac{3}{3u_n - 1}$ $v_{n+1} - v_n = \dfrac{9u_n - 3}{3u_n - 1}$ $v_{n+1} - v_n = \dfrac{3(3u_n - 1)}{3u_n - 1} = 3$ Donc la suite (v_n) est arithmétique de raison 3 et $v_0 = \frac{3}{3u_0 - 1} = \frac{3}{3-1} = \frac{3}{2}$

	2.	On en déduit que, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $v_n = \frac{3}{2} + n \times 3 = 3n + 1{,}5$ $$\text{Or, soit } n \in \mathbb{N},\ v_n = \frac{3}{3u_n - 1}$$ $$\Leftrightarrow v_n(3u_n - 1) = 3$$ $$\Leftrightarrow 3u_n - 1 = \frac{3}{v_n}$$ $$\Leftrightarrow 3u_n = \frac{3}{v_n} + 1$$ $$\Leftrightarrow u_n = \frac{\frac{3}{v_n} + 1}{3}$$ $$\Leftrightarrow u_n = \left(\frac{3}{v_n} + 1\right) \times \frac{1}{3}$$ $$\Leftrightarrow u_n = \frac{3}{v_n} \times \frac{1}{3} + 1 \times \frac{1}{3}$$ $$\Leftrightarrow u_n = \frac{1}{v_n} + \frac{1}{3}$$ $$\Leftrightarrow u_n = \frac{3 + v_n}{3v_n}$$ On a donc, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $$u_n = \frac{3 + v_n}{3v_n} = \frac{3 + 3n + 1{,}5}{3(3n + 1{,}5)}$$ $$u_n = \frac{4{,}5 + 3n}{9n + 4{,}5}$$