Spécialité Mathématiques
Tâche n° 2
Démontrer qu'une suite est arithmétique

Table des matières

Enoncé des exercices 2
Exercice 1. 2
Exercice 2. 2
Exercice 3. 2
Correction des exercices 3
Correction de l'exercice 1. 3
Correction de l'exercice 2. 5
Correction de l'exercice 3. 7

Tâche n° 2
Démontrer qu'une suite est arithmétique
Enoncé des exercices

Exercice 1.

La suite (u_n) est définie, pour tout $n \in \mathbb{N}$, par

$$u_{n+1} = 8 - \frac{16}{u_n} \text{ et } u_0 = 1.$$

On pose, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $v_n = \frac{1}{u_n - 4}$.

►1. Démontrer que la suite (v_n) est arithmétique.

►2. En déduire une expression de v_n en fonction de n, puis une expression de u_n en fonction de n.

↑

Exercice 2.

La suite (u_n) est définie, pour tout $n \in \mathbb{N}$, par

$$u_{n+1} = 10 - \frac{25}{u_n} \text{ et } u_0 = 3.$$

On pose, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $v_n = \frac{1}{u_n - 5}$.

►1. Démontrer que la suite (v_n) est arithmétique.

►2. En déduire une expression de v_n en fonction de n, puis une expression de u_n en fonction de n.

↑

Exercice 3.

La suite (u_n) est définie, pour tout $n \in \mathbb{N}$, par

$$u_{n+1} = \frac{6u_n - 1}{9u_n} \text{ et } u_0 = 1.$$

On pose, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $v_n = \frac{3}{3u_n - 1}$.

►1. Démontrer que la suite (v_n) est arithmétique.

►2. En déduire une expression de v_n en fonction de n, puis une expression de u_n en fonction de n.

↑

Tâche n° 2
Démontrer qu'une suite est arithmétique
Correction des exercices

Correction de l'exercice 1.

La suite (u_n) est définie, pour tout $n \in \mathbb{N}$, par $u_{n+1} = 8 - \frac{16}{u_n}$ et $u_0 = 1$.

On pose, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $v_n = \frac{1}{u_n - 4}$.

▶1. Démontrer que la suite (v_n) est arithmétique.

▶2. En déduire une expression de v_n en fonction de n, puis une expression de u_n en fonction de n.

↑

Exercice 1.

1.

Démontrer que la suite (v_n) est arithmétique.

Soit $n \in \mathbb{N}$

$$v_{n+1} - v_n = \frac{1}{u_{n+1} - 4} - \frac{1}{u_n - 4}$$

$$v_{n+1} - v_n = \frac{1}{8 - \frac{16}{u_n} - 4} - \frac{1}{u_n - 4}$$

$$v_{n+1} - v_n = \frac{1}{4 - \frac{16}{u_n}} - \frac{1}{u_n - 4}$$

$$v_{n+1} - v_n = \frac{1}{\frac{4u_n}{u_n} - \frac{16}{u_n}} - \frac{1}{u_n - 4}$$

$$v_{n+1} - v_n = \frac{1}{\frac{4u_n - 16}{u_n}} - \frac{1}{u_n - 4}$$

$$v_{n+1} - v_n = 1 \times \frac{u_n}{4u_n - 16} - \frac{1}{u_n - 4}$$

$$v_{n+1} - v_n = \frac{u_n}{4u_n - 16} - \frac{4 \times 1}{4 \times (u_n - 4)}$$

$$v_{n+1} - v_n = \frac{u_n}{4u_n - 16} - \frac{4}{4u_n - 16}$$

$$v_{n+1} - v_n = \frac{u_n - 4}{4u_n - 16}$$

$$v_{n+1} - v_n = \frac{u_n - 4}{4 \times (u_n - 4)}$$

$$v_{n+1} - v_n = \frac{1}{4}$$

Donc la suite (v_n) est arithmétique de raison $\frac{1}{4}$ et $v_0 = \frac{1}{u_0 - 4} = \frac{1}{1-4} = -\frac{1}{3}$

	2.	La suite (v_n) étant arithmétique de raison $\frac{1}{4}$ et $v_0 = -\frac{1}{3}$ On en déduit que, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $$v_n = v_0 + n \times q = -\frac{1}{3} + n \times \frac{1}{4} = -\frac{1}{3} + \frac{n}{4}$$ Or, soit $n \in \mathbb{N}$, $v_n = \frac{1}{u_n - 4}$ $$\Leftrightarrow \frac{1}{v_n} = u_n - 4$$ $$\Leftrightarrow \frac{1}{v_n} + 4 = u_n$$ On a donc, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $$u_n = \frac{1}{v_n} + 4 = \frac{1}{-\frac{1}{3} + \frac{n}{4}} + 4$$ $$u_n = \frac{1}{-\frac{4}{12} + \frac{3n}{12}} + 4$$ $$u_n = \frac{1}{\frac{-4+3n}{12}} + 4$$ $$u_n = \frac{12}{-4+3n} + 4$$

Correction de l'exercice 2.

La suite (u_n) est définie, pour tout $n \in \mathbb{N}$, par $u_{n+1} = 10 - \frac{25}{u_n}$ et $u_0 = 3$.

On pose, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $v_n = \frac{1}{u_n - 5}$.

▶1. Démontrer que la suite (v_n) est arithmétique.

▶2. En déduire une expression de v_n en fonction de n, puis une expression de u_n en fonction de n.

Exercice 2.	**1.**	Démontrer que la suite (v_n) est arithmétique. Soit $n \in \mathbb{N}$ $v_{n+1} - v_n = \frac{1}{u_{n+1} - 5} - \frac{1}{u_n - 5}$ $v_{n+1} - v_n = \frac{1}{10 - \frac{25}{u_n} - 5} - \frac{1}{u_n - 5}$ $v_{n+1} - v_n = \frac{1}{5 - \frac{25}{u_n}} - \frac{1}{u_n - 5}$ $v_{n+1} - v_n = \frac{1}{\frac{5u_n - 25}{u_n}} - \frac{1}{u_n - 5}$ $v_{n+1} - v_n = \frac{u_n}{5u_n - 25} - \frac{5}{(u_n - 5) \times 5}$ $v_{n+1} - v_n = \frac{u_n - 5}{(u_n - 5) \times 5} = \frac{1}{5}$ Donc la suite (v_n) est arithmétique de raison $\frac{1}{5}$ et $v_0 = \frac{1}{u_0 - 5} = \frac{1}{3-5} = -\frac{1}{2}$

	2.	On en déduit que, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $v_n = -\frac{1}{2} + n \times \frac{1}{5} = -\frac{1}{2} + \frac{n}{5} = \frac{-5}{10} + \frac{2n}{10} = \frac{2n-5}{10}$ Or, soit $n \in \mathbb{N}$, $v_n = \frac{1}{u_n - 5}$ $\Leftrightarrow v_n(u_n - 5) = 1$ $\Leftrightarrow u_n - 5 = \frac{1}{v_n}$ $\Leftrightarrow u_n = \frac{1}{v_n} + 5 = \frac{1 + 5v_n}{v_n}$ On a donc, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $u_n = \frac{1 + 5v_n}{v_n}$ $u_n = \frac{1 + 5 \times \frac{2n-5}{10}}{\frac{2n-5}{10}}$ $u_n = \left(1 + \frac{2n-5}{2}\right) \times \frac{10}{2n-5}$ $u_n = \frac{2 + 2n - 5}{2} \times \frac{2 \times 5}{2n-5}$ $u_n = \frac{5(2n-3)}{2n-5}$ $u_n = \frac{10n - 15}{2n-5}$

Correction de l'exercice 3.

La suite (u_n) est définie, pour tout $n \in \mathbb{N}$, par $u_{n+1} = \frac{6u_n - 1}{9u_n}$ et $u_0 = 1$.

On pose, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $v_n = \frac{3}{3u_n - 1}$.

▶1. Démontrer que la suite (v_n) est arithmétique.

▶2. En déduire une expression de v_n en fonction de n, puis une expression de u_n en fonction de n.

Exercice 3.	**1.**	Démontrer que la suite (v_n) est arithmétique. Soit $n \in \mathbb{N}$ $v_{n+1} - v_n = \dfrac{3}{3u_{n+1} - 1} - \dfrac{3}{3u_n - 1}$ $v_{n+1} - v_n = \dfrac{3}{3 \times \dfrac{6u_n - 1}{9u_n} - 1} - \dfrac{3}{3u_n - 1}$ $v_{n+1} - v_n = \dfrac{3}{\dfrac{6u_n - 1 - 3u_n}{3u_n}} - \dfrac{3}{3u_n - 1}$ $v_{n+1} - v_n = \dfrac{3 \times 3u_n}{3u_n - 1} - \dfrac{3}{3u_n - 1}$ $v_{n+1} - v_n = \dfrac{9u_n - 3}{3u_n - 1}$ $v_{n+1} - v_n = \dfrac{3(3u_n - 1)}{3u_n - 1} = 3$ Donc la suite (v_n) est arithmétique de raison 3 et $v_0 = \frac{3}{3u_0 - 1} = \frac{3}{3-1} = \frac{3}{2}$

2.

On en déduit que, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $v_n = \frac{3}{2} + n \times 3 = 3n + 1{,}5$

Or, soit $n \in \mathbb{N}$, $v_n = \frac{3}{3u_n - 1}$

$$\Leftrightarrow v_n(3u_n - 1) = 3$$

$$\Leftrightarrow 3u_n - 1 = \frac{3}{v_n}$$

$$\Leftrightarrow 3u_n = \frac{3}{v_n} + 1$$

$$\Leftrightarrow u_n = \frac{\frac{3}{v_n} + 1}{3}$$

$$\Leftrightarrow u_n = \left(\frac{3}{v_n} + 1\right) \times \frac{1}{3}$$

$$\Leftrightarrow u_n = \frac{3}{v_n} \times \frac{1}{3} + 1 \times \frac{1}{3}$$

$$\Leftrightarrow u_n = \frac{1}{v_n} + \frac{1}{3}$$

$$\Leftrightarrow u_n = \frac{3 + v_n}{3v_n}$$

On a donc, pour tout $n \in \mathbb{N}$,

$$u_n = \frac{3 + v_n}{3v_n} = \frac{3 + 3n + 1{,}5}{3(3n + 1{,}5)}$$

$$u_n = \frac{4{,}5 + 3n}{9n + 4{,}5}$$