Terminale Spécialité Mathématiques
Tâche n° 3
Démontrer qu'une suite est géométrique

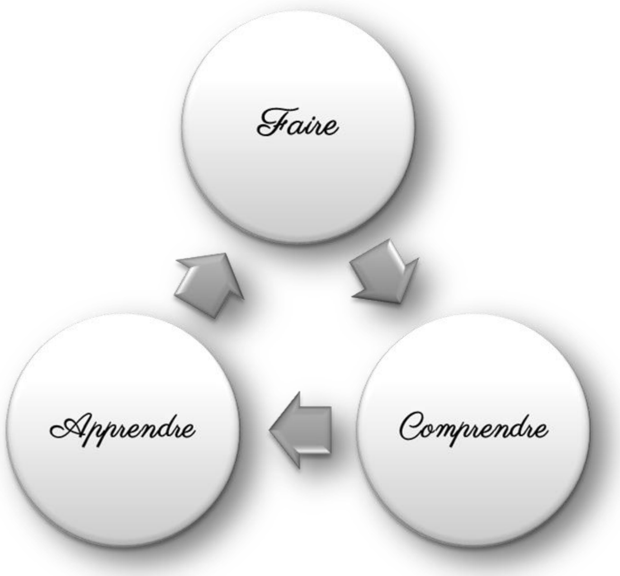

Table des matières

Tâche n° 3
Démontrer qu'une suite est géométrique
Enoncé des exercices

Exercice 1.

La suite (u_n) est définie, pour tout $n \in \mathbb{N}$, par $u_{n+1} = 2u_n - 5$ et $u_0 = 1$.

On pose, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $v_n = u_n - 5$.

▶1. Démontrer que la suite (v_n) est géométrique.

▶2. En déduire une expression de v_n en fonction de n, puis de u_n en fonction de n.

Exercice 2.

La suite (u_n) est définie, pour tout $n \in \mathbb{N}$, par $u_{n+1} = 2 - \frac{4}{5}u_n$ et $u_0 = 0$.

On pose, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $v_n = u_n - \frac{10}{9}$.

▶1. Démontrer que la suite (v_n) est géométrique.

▶2. En déduire une expression de v_n en fonction de n, puis de u_n en fonction de n.

Exercice 3.

La suite (u_n) est définie, pour tout $n \in \mathbb{N}$, par

$$u_{n+1} = \frac{3u_n}{1+2u_n} \text{ et } u_0 = \frac{1}{2}.$$

On pose, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $v_n = \frac{u_n}{1-u_n}$.

▶1. Démontrer que la suite (v_n) est géométrique.

▶2. En déduire une expression de v_n en fonction de n, puis de u_n en fonction de n.

Exercice 4.

La suite (u_n) est définie, pour tout $n \in \mathbb{N}$, par

$$u_{n+1} = \frac{4u_n-6}{u_n-1} \text{ et } u_0 = 6.$$

On pose, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $v_n = \frac{u_n-3}{u_n-2}$.

▶1. Démontrer que la suite (v_n) est géométrique.

▶2. En déduire une expression de v_n en fonction de n, puis de u_n en fonction de n.

Tâche n° 3
Démontrer qu'une suite est géométrique
Correction des exercices

Correction de l'exercice 1.

La suite (u_n) est définie, pour tout $n \in \mathbb{N}$, par $u_{n+1} = 2u_n - 5$ et $u_0 = 1$.

On pose, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $v_n = u_n - 5$.

▶1. Démontrer que la suite (v_n) est géométrique.

▶2. En déduire une expression de v_n en fonction de n, puis de u_n en fonction de n.

Visualisation avant de commencer l'étude par tableur :

	A	B	C
1	n	u_n	v_n
2	0	1	-4
3	1	-3	-8
4	2	-11	-16
5	3	-27	-32
6	4	-59	-64
7	5	-123	-128
8	6	-251	-256
9	7	-507	-512
10	8	-1019	-1024
11	9	-2043	-2048
12	10	-4091	-4096

<table>
<tr>
<td>**Exercice 1.**</td>
<td>**1.**</td>
<td>Démontrer que la suite (v_n)est géométrique.
Soit $n \in \mathbb{N}$
$v_{n+1} = u_{n+1} - 5$
$v_{n+1} = 2u_n - 5 \ \ - 5$
$v_{n+1} = 2u_n - 10$
$v_{n+1} = 2(u_n - 5)$
$v_{n+1} = 2v_n$
Donc la suite (v_n) est géométrique de raison 2 et
$$v_0 = u_0 - 5 = 1 - 5 = -4$$</td>
</tr>
</table>

<table>
<tr>
<td></td>
<td>2.</td>
<td>La suite (v_n) étant géométrique de raison 2 et $v_0 = -4$.
On en déduit que, pour tout $n \in \mathbb{N}$,
$$v_n = v_0 \times q^n = -4 \times 2^n$$
$$v_n = -2^2 \times 2^n = -2^{n+2}$$
$$\text{or, soit } n \in \mathbb{N},\ v_n = u_n - 5$$
$$\Leftrightarrow u_n = v_n + 5$$
On a donc, pour tout $n \in \mathbb{N}$,
$$u_n = v_n + 5$$
$$u_n = -2^{n+2} + 5$$</td>
</tr>
</table>

Correction de l'exercice 2.

La suite (u_n) est définie, pour tout $n \in \mathbb{N}$, par $u_{n+1} = 2 - \frac{4}{5}u_n$ et $u_0 = 0$.

On pose, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $v_n = u_n - \frac{10}{9}$.

▶1. Démontrer que la suite (v_n) est géométrique.

▶2. En déduire une expression de v_n en fonction de n, puis de u_n en fonction de n.

Visualisation avant de commencer l'étude par tableur :

	A	B	C
1	n	u_n	v_n
2	0	0	-1,11111111
3	1	2	0,88888889
4	2	0,4	-0,71111111
5	3	1,68	0,56888889
6	4	0,656	-0,45511111
7	5	1,4752	0,36408889
8	6	0,81984	-0,29127111
9	7	1,344128	0,23301689
10	8	0,9246976	-0,18641351
11	9	1,26024192	0,14913081
12	10	0,99180646	-0,11930465

<table>
<tr>
<td rowspan="2">Exercice 2.</td>
<td>1.</td>
<td>Démontrer que la suite (v_n) est géométrique.
Soit $n \in \mathbb{N}$
$v_{n+1} = u_{n+1} - \frac{10}{9}$
$v_{n+1} = 2 - \frac{4}{5}u_n - \frac{10}{9}$
$v_{n+1} = \frac{8}{9} - \frac{4}{5}u_n$
$v_{n+1} = -\frac{4}{5}\left(\frac{8/9}{-4/5} + u_n\right)$
$v_{n+1} = -\frac{4}{5}\left(\frac{8}{9} \times \frac{5}{-4} + u_n\right)$
$v_{n+1} = -\frac{4}{5}\left(-\frac{10}{9} + u_n\right)$
$v_{n+1} = -\frac{4}{5}\ v_n$
Donc la suite (v_n) est géométrique de raison $\frac{-4}{5}$ et $v_0 = u_0 - \frac{10}{9} = -\frac{10}{9}$</td>
</tr>
<tr>
<td>2.</td>
<td>On en déduit que, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $v_n = -\frac{10}{9} \times \left(\frac{-4}{5}\right)^n$
$$\text{or, } v_n = u_n - \frac{10}{9}$$
On a donc, pour tout $n \in \mathbb{N}$,
$$u_n = v_n + \frac{10}{9}$$
$$u_n = -\frac{10}{9} \times \left(\frac{-4}{5}\right)^n + \frac{10}{9}$$</td>
</tr>
</table>

Correction de l'exercice 3.

La suite (u_n) est définie, pour tout $n \in \mathbb{N}$, par $u_{n+1} = \frac{3u_n}{1+2u_n}$ et $u_0 = \frac{1}{2}$.

On pose, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $v_n = \frac{u_n}{1-u_n}$.

▸1. Démontrer que la suite (v_n) est géométrique.

▸2. En déduire une expression de v_n en fonction de n, puis une expression de u_n en fonction de n.

Visualisation avant de commencer l'étude par tableur :

	A	B	C
1	n	u_n	v_n
2	0	0,5	1
3	1	0,75	3
4	2	0,9	9
5	3	0,96428571	27
6	4	0,98780488	81
7	5	0,99590164	243
8	6	0,99863014	729
9	7	0,99954296	2187
10	8	0,99984761	6561
11	9	0,9999492	19683
12	10	0,99998307	59049

Exercice 3.

1. Démontrer que la suite (v_n) est géométrique.

Soit $n \in \mathbb{N}$

$$v_{n+1} = \frac{u_{n+1}}{1 - u_{n+1}}$$

$$v_{n+1} = \frac{\frac{3u_n}{1+2u_n}}{1 - \frac{3u_n}{1+2u_n}}$$

$$v_{n+1} = \frac{\frac{3u_n}{1+2u_n}}{\frac{1+2u_n}{1+2u_n} - \frac{3u_n}{1+2u_n}}$$

$$v_{n+1} = \frac{\frac{3u_n}{1+2u_n}}{\frac{1+2u_n-3u_n}{1+2u_n}}$$

$$v_{n+1} = \frac{\frac{3u_n}{1+2u_n}}{\frac{1-u_n}{1+2u_n}}$$

$$v_{n+1} = \frac{3u_n}{1+2u_n} \times \frac{1+2u_n}{1-u_n}$$

$$v_{n+1} = \frac{3u_n(1+2u_n)}{(1+2u_n)(1-u_n)}$$

$$v_{n+1} = \frac{3u_n}{1-u_n} = 3 \times \frac{u_n}{1-u_n} = 3 \times v_n$$

Donc la suite (v_n) est géométrique de raison 3 et $v_0 = \frac{1/2}{1-1/2} = 1$

	2.	On en déduit que, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $v_n = 1 \times 3^n = 3^n$ $$\text{or, soit } n \in \mathbb{N},\ v_n = \frac{u_n}{1-u_n}$$ $$\Leftrightarrow v_n(1-u_n) = u_n$$ $$\Leftrightarrow v_n - v_n u_n = u_n$$ $$\Leftrightarrow v_n = u_n + v_n u_n$$ $$\Leftrightarrow v_n = u_n(1+v_n)$$ $$\Leftrightarrow \frac{v_n}{1+v_n} = u_n$$ On a donc, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $$u_n = \frac{3^n}{1+3^n}$$

Correction de l'exercice 4.

La suite (u_n) est définie, pour tout $n \in \mathbb{N}$, par

$$u_{n+1} = \frac{4u_n - 6}{u_n - 1} \text{ et } u_0 = 6.$$

On pose, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $v_n = \frac{u_n - 3}{u_n - 2}$.

▸1. Démontrer que la suite (v_n) est géométrique.

▸2. En déduire une expression de v_n en fonction de n, puis de u_n en fonction de n.

Visualisation avant de commencer l'étude par tableur :

	A	B	C
1	n	u_n	v_n
2	0	6	0,75
3	1	3,6	0,375
4	2	3,23076923	0,1875
5	3	3,10344828	0,09375
6	4	3,04918033	0,046875
7	5	3,024	0,0234375
8	6	3,01185771	0,01171875
9	7	3,00589391	0,00585938
10	8	3,0029383	0,00292969
11	9	3,00146699	0,00146484
12	10	3,00073296	0,00073242

Exercice 3.

1.

Démontrer que la suite (v_n) est géométrique.

Soit $n \in \mathbb{N}$

$$v_{n+1} = \frac{u_{n+1} - 3}{u_{n+1} - 2}$$

$$v_{n+1} = \frac{\dfrac{4u_n - 6}{u_n - 1} - 3}{\dfrac{4u_n - 6}{u_n - 1} - 2}$$

$$v_{n+1} = \frac{\dfrac{4u_n - 6}{u_n - 1} - \dfrac{3(u_n - 1)}{u_n - 1}}{\dfrac{4u_n - 6}{u_n - 1} - \dfrac{2(u_n - 1)}{u_n - 1}}$$

$$v_{n+1} = \frac{\dfrac{4u_n - 6 - 3(u_n - 1)}{u_n - 1}}{\dfrac{4u_n - 6 - 2(u_n - 1)}{u_n - 1}}$$

$$v_{n+1} = \frac{\dfrac{4u_n - 6 - 3u_n + 3}{u_n - 1}}{\dfrac{4u_n - 6 - 2u_n + 2}{u_n - 1}}$$

$$v_{n+1} = \frac{\dfrac{u_n - 3}{u_n - 1}}{\dfrac{2u_n - 4}{u_n - 1}}$$

$$v_{n+1} = \frac{u_n - 3}{u_n - 1} \times \frac{u_n - 1}{2u_n - 4}$$

$$v_{n+1} = \frac{(u_n - 3)(u_n - 1)}{(u_n - 1)(2u_n - 4)}$$

$$v_{n+1} = \frac{u_n - 3}{2(u_n - 2)} = \frac{1}{2} \times \frac{u_n - 3}{u_n - 2} = \frac{1}{2} v_n$$

Donc la suite (v_n) est géométrique de raison $\frac{1}{2}$ et $v_0 = \frac{6-3}{6-2} = \frac{3}{4}$

	2.	On en déduit que, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $v_n = \frac{3}{4} \times \left(\frac{1}{2}\right)^n$ or, soit $n \in \mathbb{N}$, $v_n = \frac{u_n - 3}{u_n - 2}$ $\Leftrightarrow v_n(u_n - 2) = u_n - 3$ $\Leftrightarrow v_n u_n - 2v_n = u_n - 3$ $\Leftrightarrow v_n u_n - u_n = 2v_n - 3$ $\Leftrightarrow u_n(v_n - 1) = 2v_n - 3$ $\Leftrightarrow u_n = \dfrac{2v_n - 3}{v_n - 1}$ On a donc, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $u_n = \dfrac{2 \times \frac{3}{4} \times \left(\frac{1}{2}\right)^n - 3}{\frac{3}{4} \times \left(\frac{1}{2}\right)^n - 1} = \dfrac{\frac{3}{2} \times \left(\frac{1}{2}\right)^n - 3}{\frac{3}{4} \times \left(\frac{1}{2}\right)^n - 1}$