Terminale Spécialité Mathématiques
Tâche n° 4
Déterminer le sens de variations d'une suite monotone

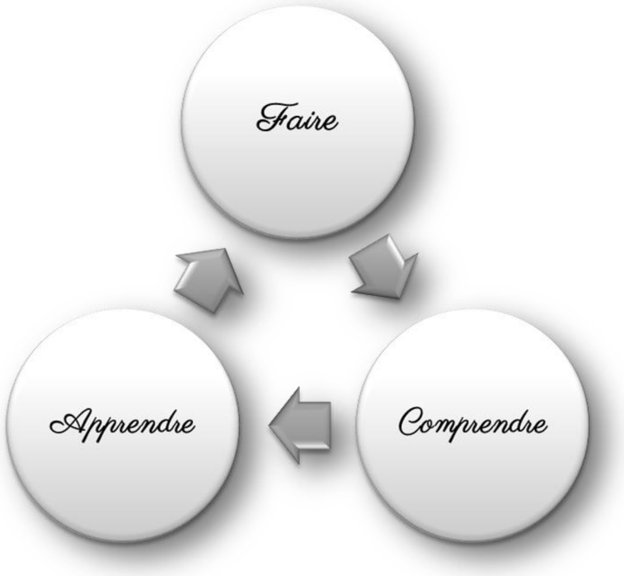


Table des matières

Tâche n° $\boxed{4}$
Déterminer le sens de variations d'une suite monotone
Enoncé des exercices

Exercice 1.

Pour chaque suite (u_n) déterminer son sens de variations

▶1 Pour tout entier $n, u_n = 5 - 3n$

▶2. Pour tout entier $n, u_n = 2 \times 6^n$

▶3. Pour tout entier $n, u_n = \sqrt{n}$

▶4. Pour tout entier non nul $n, u_n = \dfrac{1}{n}$

Exercice 2.

Pour chaque suite (u_n) déterminer son sens de variations

▶1 Pour tout entier $n, u_n = 7 - 4n^2$

▶2. Pour tout entier $n, u_n = \dfrac{1}{\sqrt{n+1}}$

▶3. Pour tout entier $n, u_n = \dfrac{2^n}{7}$

▶4. Pour tout entier $n, u_n = \dfrac{2n}{n+1}$

Exercice 3.

Pour chaque suite (u_n) déterminer son sens de variations

▶1 Pour tout entier non nul $n, u_n = n^3 - \dfrac{3}{2}n^2$

▶2. Pour tout entier non nul $n, u_n = \dfrac{n}{n^2+1}$

▶3. Pour tout entier $n, u_n = 5^n - 3$

▶4. Pour tout entier non nul $n, u_n = \sqrt{2n-1}$

Exercice 4.

Pour chaque suite (u_n) déterminer son sens de variations

▶1 Pour tout entier $n, u_n = e^n$

▶2. Pour tout entier non nul $n, u_n = \dfrac{-5}{n}$

▶3. Pour tout entier $n, u_n = \dfrac{\sqrt{n}}{2^n}$

▶4. Pour tout entier $n, u_n = \dfrac{7^n}{3^n}$

Tâche n° $\boxed{4}$
Déterminer le sens de variations d'une suite monotone
Correction des exercices

Correction de l'exercice 1.

Pour chaque suite (u_n) déterminer son sens de variations

▶1 Pour tout entier $n, u_n = 5 - 3n$

▶2. Pour tout entier $n, u_n = 2 \times 6^n$

▶3. Pour tout entier $n, u_n = \sqrt{n}$

▶4. Pour tout entier non nul $n, u_n = \dfrac{1}{n}$

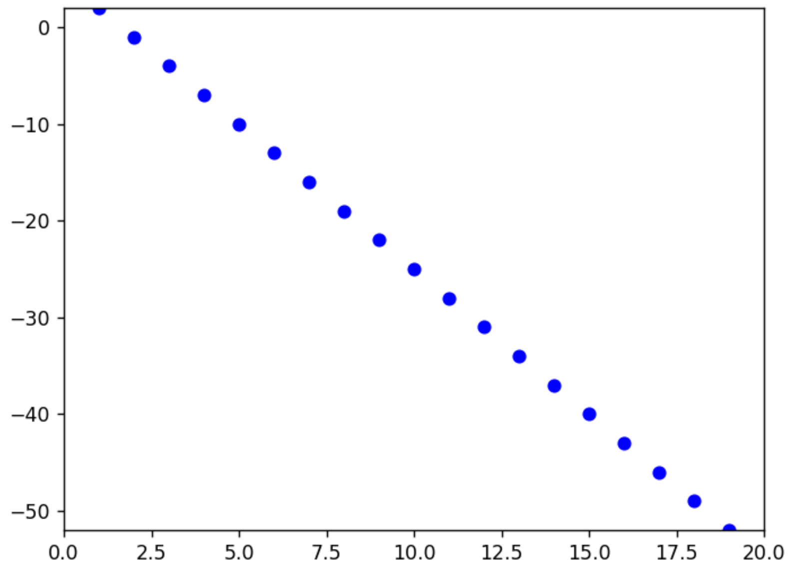
<table>
<tr>
<td rowspan="1">Exercice 1.</td>
<td>1.</td>
<td>
Soit $n \in \mathbb{N}, u_n = 5 - 3n$

$$u_{n+1} - u_n = 5 - 3(n+1) - (5 - 3n)$$

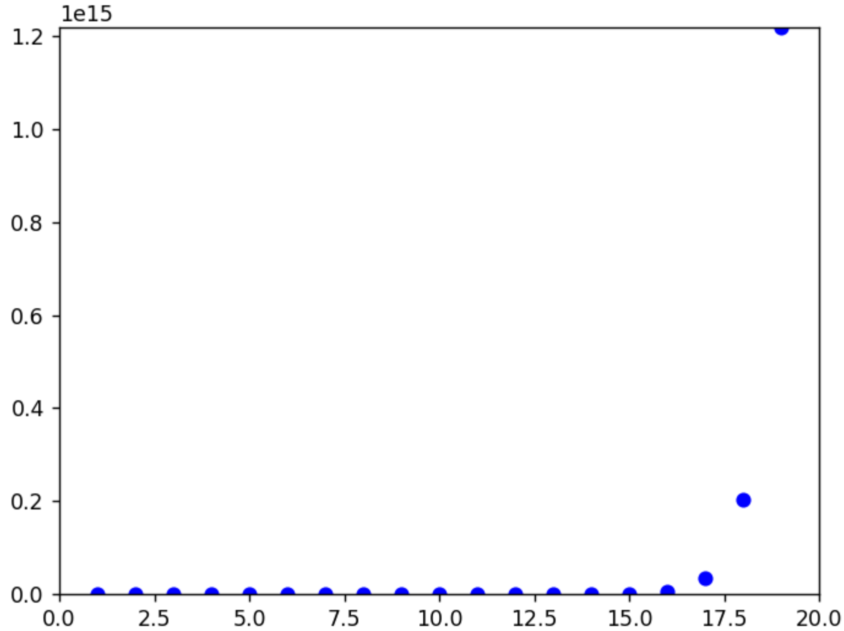
$$u_{n+1} - u_n = 5 - 3n - 3 - 5 + 3n$$

$$u_{n+1} - u_n = -3 < 0$$

J'en déduis que la suite (u_n) est décroissante.



</td>
</tr>
</table>

	2.	Soit $n \in \mathbb{N}, u_n = 2 \times 6^n > 0$ $$\frac{u_{n+1}}{u_n} = \frac{2 \times 6^{n+1}}{2 \times 6^n}$$ $$\frac{u_{n+1}}{u_n} = \frac{6^n \times 6}{6^n}$$ $$\frac{u_{n+1}}{u_n} = 6 > 1$$ J'en déduis que la suite (u_n) est strictement croissante. 

3.

Soit $n \in \mathbb{N}, u_n = \sqrt{n}$

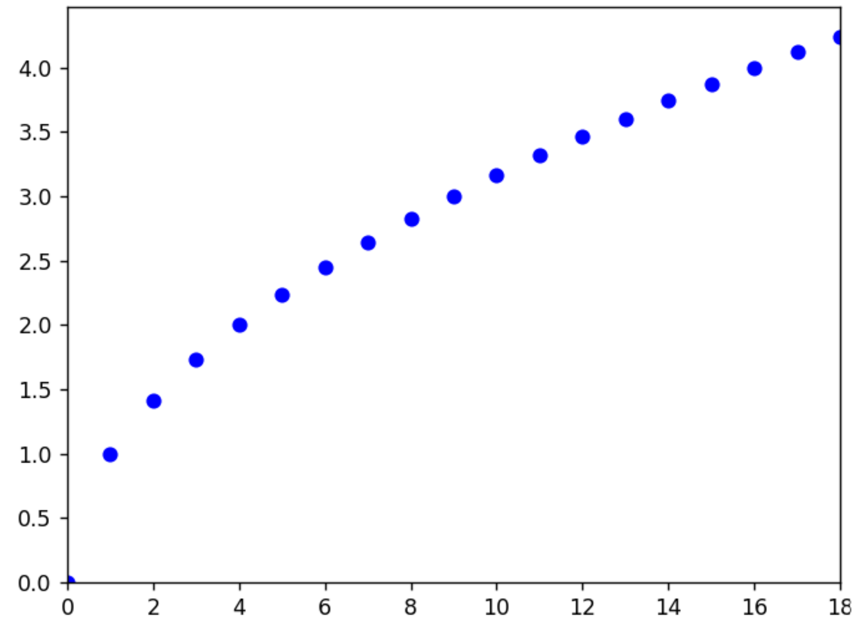
$$u_{n+1} - u_n = \sqrt{n+1} - \sqrt{n}$$

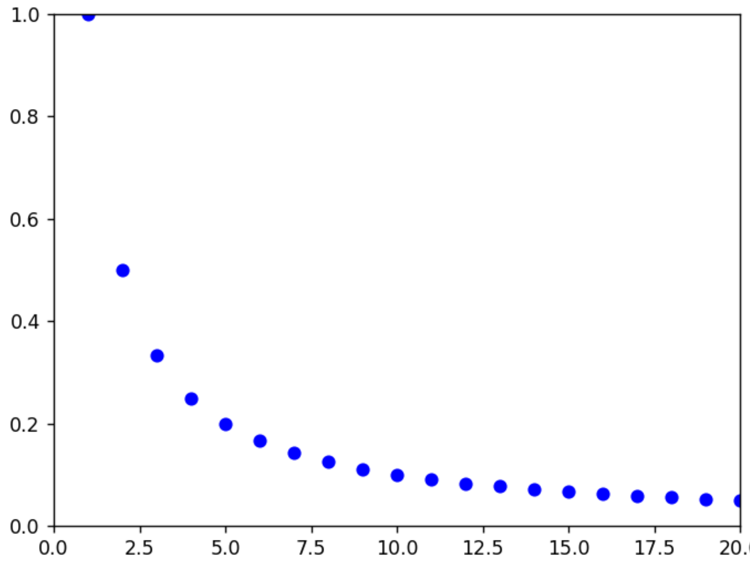
$$u_{n+1} - u_n = \frac{\left(\sqrt{n+1} - \sqrt{n}\right)\left(\sqrt{n+1} + \sqrt{n}\right)}{\sqrt{n+1} + \sqrt{n}}$$

$$u_{n+1} - u_n = \frac{n+1-n}{\sqrt{n+1} + \sqrt{n}}$$

$$u_{n+1} - u_n = \frac{1}{\sqrt{n+1} + \sqrt{n}} > 0$$

J'en déduis que la suite (u_n) est strictement croissante.



	4.	Soit $n \in \mathbb{N}^*$, $u_n = \frac{1}{n}$ $$u_{n+1} - u_n = \frac{1}{n+1} - \frac{1}{n}$$ $$u_{n+1} - u_n = \frac{1 \times n}{(n+1) \times n} - \frac{1 \times (n+1)}{n \times (n+1)}$$ $$u_{n+1} - u_n = \frac{n-n-1}{n(n+1)}$$ $$u_{n+1} - u_n = \frac{-1}{n(n+1)} < 0$$ J'en déduis que la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ est strictement décroissante. 

Correction de l'exercice 2.

Pour chaque suite (u_n) déterminer son sens de variations

▶ 1 Pour tout entier n, $u_n = 7 - 4n^2$

▶ 2. Pour tout entier n, $u_n = \dfrac{1}{\sqrt{n+1}}$

▶ 3. Pour tout entier n, $u_n = \dfrac{2^n}{7}$

▶ 4. Pour tout entier n, $u_n = \dfrac{2n}{n+1}$

Exercice 2.

1.

Soit $n \in \mathbb{N}, u_n = 7 - 4n^2$

$$u_{n+1} - u_n = 7 - 4(n+1)^2 - (7 - 4n^2)$$

$$u_{n+1} - u_n = 7 - 4(n^2 + 2n + 1) - 7 + 4n^2$$

$$u_{n+1} - u_n = -4n^2 - 8n - 4 + 4n^2$$

$$u_{n+1} - u_n = -8n - 4$$

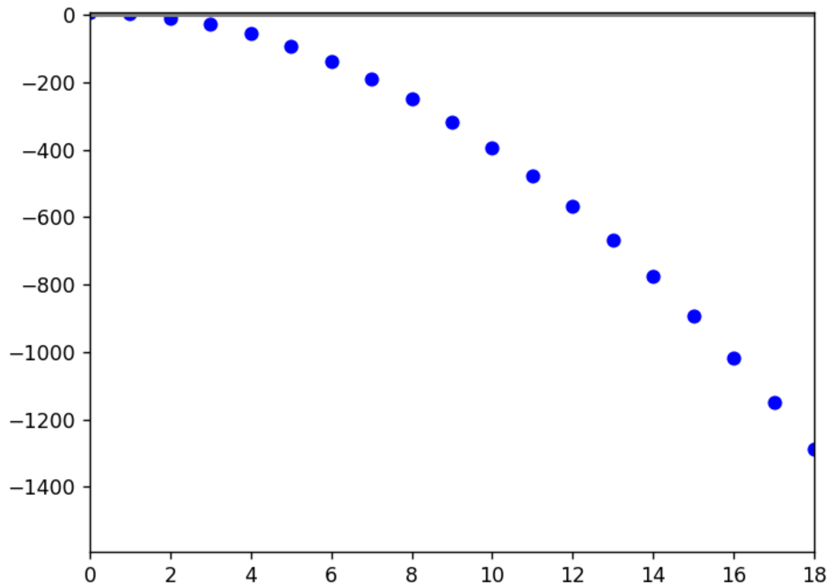
$$\text{or } n \geq 0$$

$$\Leftrightarrow -8n \leq 0$$

$$\Leftrightarrow -8n - 4 \leq -4$$

$$\text{donc } u_{n+1} - u_n \leq 0$$

J'en déduis que la suite (u_n) est décroissante.



2.

Soit $n \in \mathbb{N}$, $u_n = \frac{1}{\sqrt{n+1}}$

$$u_{n+1} - u_n = \frac{1}{\sqrt{n+2}} - \frac{1}{\sqrt{n+1}}$$

$$u_{n+1} - u_n = \frac{\sqrt{n+1}}{\sqrt{n+2} \times \sqrt{n+1}} - \frac{\sqrt{n+2}}{\sqrt{n+1} \times \sqrt{n+2}}$$

$$u_{n+1} - u_n = \frac{\sqrt{n+1} - \sqrt{n+2}}{\sqrt{n+2} \times \sqrt{n+1}}$$

$$u_{n+1} - u_n = \frac{\left(\sqrt{n+1} - \sqrt{n+2}\right)\left(\sqrt{n+1} + \sqrt{n+2}\right)}{\sqrt{n+2} \times \sqrt{n+1} \times \left(\sqrt{n+1} + \sqrt{n+2}\right)}$$

$$u_{n+1} - u_n = \frac{\sqrt{n+1}^2 - \sqrt{n+2}^2}{\sqrt{n+2} \times \sqrt{n+1} \times \left(\sqrt{n+1} + \sqrt{n+2}\right)}$$

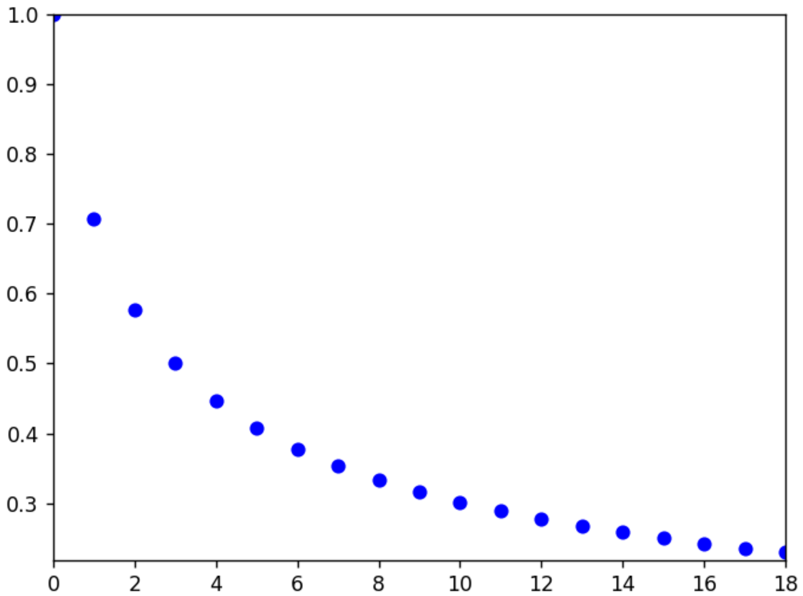
$$u_{n+1} - u_n = \frac{n+1-(n+2)}{\sqrt{n+2} \times \sqrt{n+1} \times \left(\sqrt{n+1} + \sqrt{n+2}\right)}$$

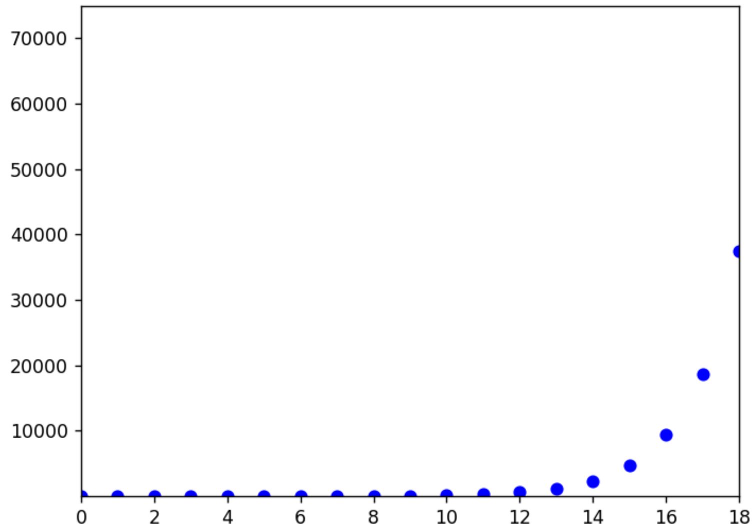
$$u_{n+1} - u_n = \frac{n+1-n-2}{\sqrt{n+2} \times \sqrt{n+1} \times \left(\sqrt{n+1} + \sqrt{n+2}\right)}$$

$$u_{n+1} - u_n = \frac{-1}{\sqrt{n+2} \times \sqrt{n+1} \times \left(\sqrt{n+1} + \sqrt{n+2}\right)}$$

$$\text{donc } u_{n+1} - u_n < 0$$

J'en déduis que la suite (u_n) est strictement décroissante.



	3.	Soit $n \in \mathbb{N}$, $u_n = \frac{2^n}{7} > 0$ $$\frac{u_{n+1}}{u_n} = \frac{\frac{2^{n+1}}{7}}{\frac{2^n}{7}}$$ $$\frac{u_{n+1}}{u_n} = \frac{2^{n+1}}{7} \times \frac{7}{2^n}$$ $$\frac{u_{n+1}}{u_n} = \frac{2 \times 2^n}{2^n} = 2 > 1$$ donc $u_{n+1} > u_n$ J'en déduis que la suite (u_n) est croissante. 

<table>
<tr>
<td></td>
<td>4.</td>
<td>

Soit $n \in \mathbb{N}, u_n = \frac{2n}{n+1}$

$$u_{n+1} - u_n = \frac{2(n+1)}{n+2} - \frac{2n}{n+1}$$

$$u_{n+1} - u_n = \frac{2n+2}{n+2} - \frac{2n}{n+1}$$

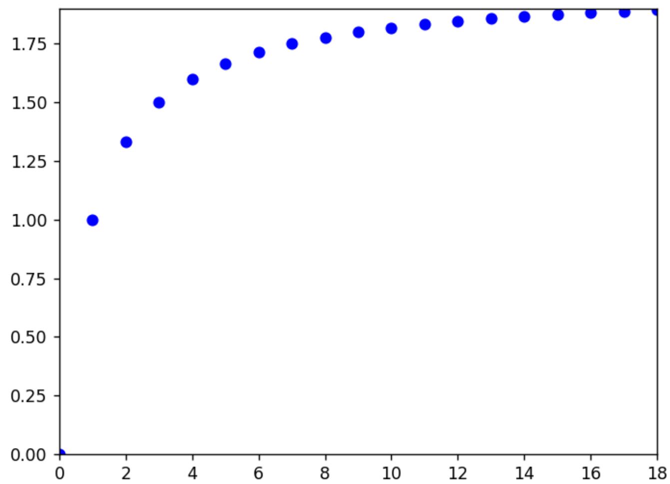
$$u_{n+1} - u_n = \frac{(2n+2)(n+1)}{(n+2)(n+1)} - \frac{2n(n+2)}{(n+1)(n+2)}$$

$$u_{n+1} - u_n = \frac{(2n+2)(n+1) - 2n(n+2)}{(n+2)(n+1)}$$

$$u_{n+1} - u_n = \frac{2n^2 + 2n + 2n + 2 - 2n^2 - 4n}{(n+2)(n+1)}$$

$$u_{n+1} - u_n = \frac{2}{(n+2)(n+1)} > 0$$

J'en déduis que la suite (u_n) est strictement croissante.



</td>
</tr>
</table>

Correction de l'exercice 3.

Pour chaque suite (u_n) déterminer son sens de variations

▶1 Pour tout entier non nul $n, u_n = n^3 - \frac{3}{2}n^2$

▶2. Pour tout entier non nul $n, u_n = \frac{n}{n^2+1}$

▶3. Pour tout entier $n, u_n = 5^n - 3$

▶4. Pour tout entier non nul $n, u_n = \sqrt{2n-1}$

Exercice 3.

1.

Soit $n \in \mathbb{N}^*, u_n = n^3 - \frac{3}{2}n^2$

$$u_{n+1} - u_n = (n+1)^3 - \frac{3}{2}(n+1)^2 - \left(n^3 - \frac{3}{2}n^2\right)$$

$$u_{n+1} - u_n = (n+1)(n+1)^2 - \frac{3}{2}(n^2+2n+1) - n^3 + \frac{3}{2}n^2$$

$$u_{n+1} - u_n = (n+1)(n^2+2n+1) - \frac{3}{2}n^2 - 3n - \frac{3}{2} - n^3 + \frac{3}{2}n^2$$

$$u_{n+1} - u_n = n^3 + 2n^2 + n + n^2 + 2n + 1 - 3n - \frac{3}{2} - n^3$$

$$u_{n+1} - u_n = 3n^2 - \frac{1}{2}$$

$$3n^2 - \frac{1}{2} \geq 0$$

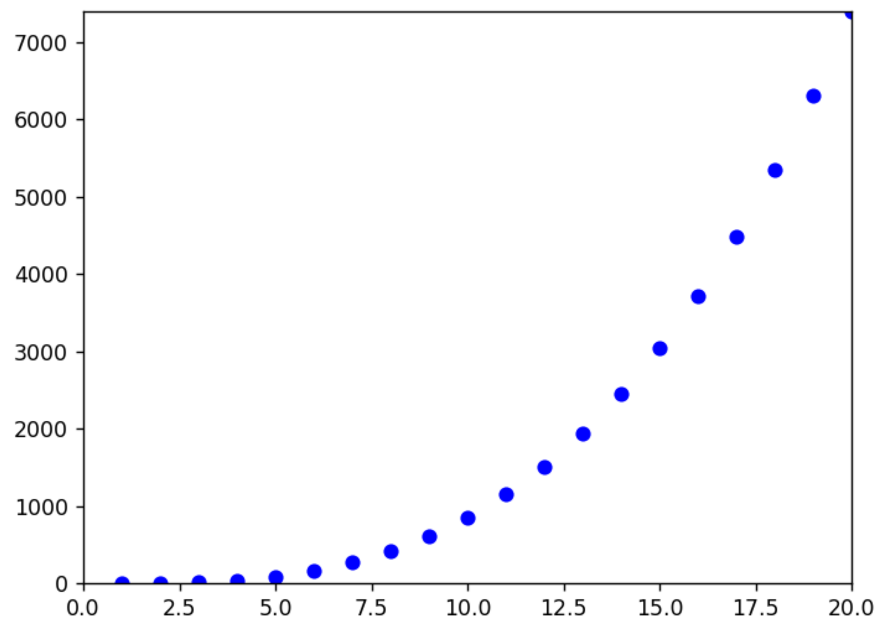
$$\Leftrightarrow 3n^2 \geq \frac{1}{2}$$

$$\Leftrightarrow n^2 \geq \frac{1}{6}$$

$$\Leftrightarrow n \geq \sqrt{\frac{1}{6}} \text{ ou } \underbrace{n \leq -\sqrt{\frac{1}{6}}}_{exclu}$$

$$\text{donc } \forall n \in \mathbb{N}^*, u_{n+1} - u_n \geq 0$$

J'en déduis que la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ est croissante.



2.

Soit $n \in \mathbb{N}^*$, $u_n = \frac{n}{n^2+1}$

$$u_{n+1} - u_n = \frac{n+1}{(n+1)^2+1} - \frac{n}{n^2+1}$$

$$u_{n+1} - u_n = \frac{n+1}{n^2+2n+2} - \frac{n}{n^2+1}$$

$$u_{n+1} - u_n = \frac{(n+1)(n^2+1)}{(n^2+2n+2)(n^2+1)} - \frac{n(n^2+2n+2)}{(n^2+1)(n^2+2n+2)}$$

$$u_{n+1} - u_n = \frac{n^3+n+n^2+1-n^3-2n^2-2n}{(n^2+2n+2)(n^2+1)}$$

$$u_{n+1} - u_n = \frac{-n^2-n+1}{(n^2+2n+2)(n^2+1)}$$

On utilise le discriminant pour étudier le signe de $-n^2-n+1$:

$$\Delta = 1 - 4 \times (-1) = 5 > 0$$

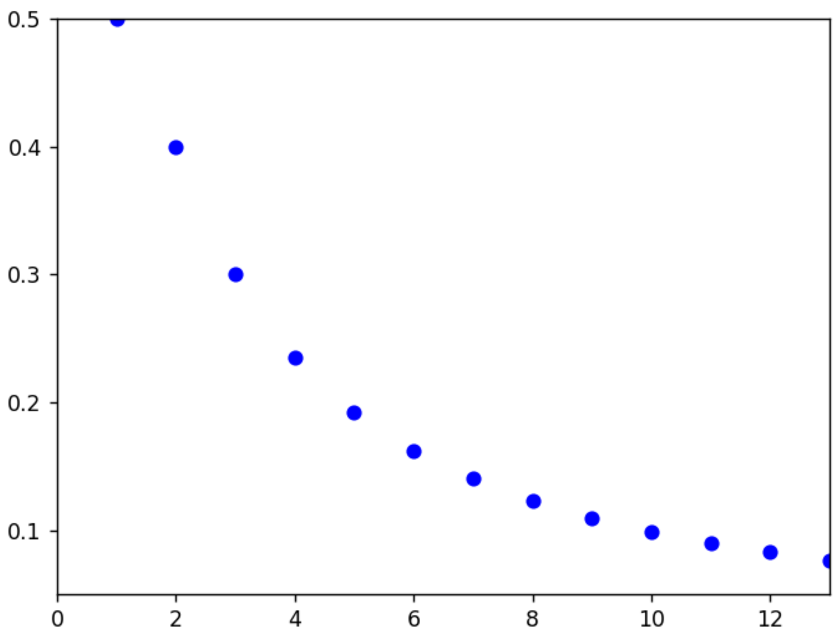
Les deux racines sont $\frac{1+\sqrt{5}}{-2} \approx -1{,}618$ et $\frac{1-\sqrt{5}}{-2} \approx 0{,}618$

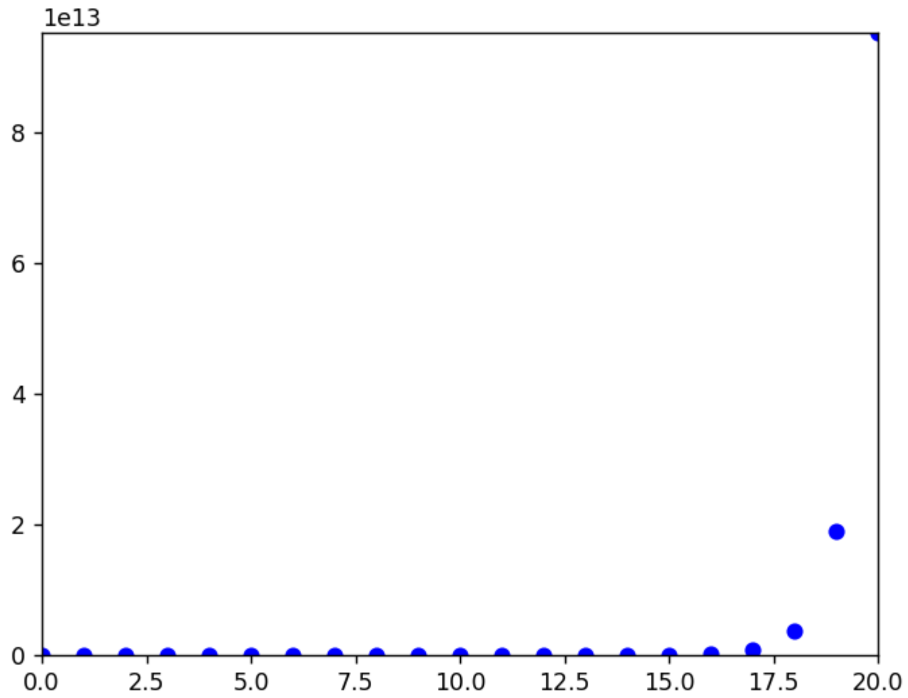
La parabole étant tournée vers le bas puisque $a = -1 < 0$

n	$-\infty$		$\frac{1+\sqrt{5}}{-2}$		$\frac{1-\sqrt{5}}{-2}$		$+\infty$
$-n^2-n+1$		$-$	0	$+$	0	$-$	

$$\text{donc } \forall n \in \mathbb{N}^*, u_{n+1} - u_n < 0$$

J'en déduis que la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ est strictement croissante.



	3.	Soit $n \in \mathbb{N}, u_n = 5^n - 3$ $$u_{n+1} - u_n = 5^{n+1} - 3 - (5^n - 3)$$ $$u_{n+1} - u_n = 5^{n+1} - 5^n$$ $$u_{n+1} - u_n = 5 \times 5^n - 5^n$$ $$u_{n+1} - u_n = 4 \times 5^n > 0$$ J'en déduis que la suite (u_n) est croissante. 

<table>
<tr>
<td></td>
<td>4.</td>
<td>

Soit $n \in \mathbb{N}^*, u_n = \sqrt{2n-1}$

$$u_{n+1} - u_n = \sqrt{2(n+1)-1} - \sqrt{2n-1}$$

$$u_{n+1} - u_n = \sqrt{2n+2-1} - \sqrt{2n-1}$$

$$u_{n+1} - u_n = \sqrt{2n+1} - \sqrt{2n-1}$$

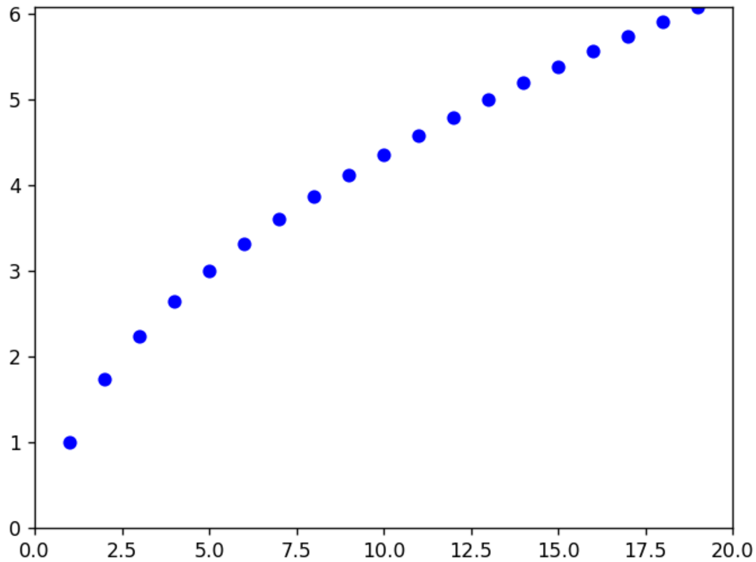
$$u_{n+1} - u_n = \frac{\left(\sqrt{2n+1} - \sqrt{2n-1}\right)\left(\sqrt{2n+1} + \sqrt{2n-1}\right)}{\sqrt{2n+1} + \sqrt{2n-1}}$$

$$u_{n+1} - u_n = \frac{2n+1-(2n-1)}{\sqrt{2n+1} + \sqrt{2n-1}}$$

$$u_{n+1} - u_n = \frac{2n+1-2n+1}{\sqrt{2n+1} + \sqrt{2n-1}}$$

$$u_{n+1} - u_n = \frac{2}{\sqrt{2n+1} + \sqrt{2n-1}} > 0$$

J'en déduis que la suite (u_n) est strictement croissante.



</td>
</tr>
</table>

Correction de l'exercice 4.

Pour chaque suite (u_n) déterminer son sens de variations

▶ 1 Pour tout entier $n, u_n = e^n$

▶ 2. Pour tout entier non nul $n, u_n = \dfrac{-5}{n}$

▶ 3. Pour tout entier $n, u_n = \dfrac{\sqrt{n}}{2^n}$

▶ 4. Pour tout entier $n, u_n = \dfrac{7^n}{3^n}$

Exercice 4.

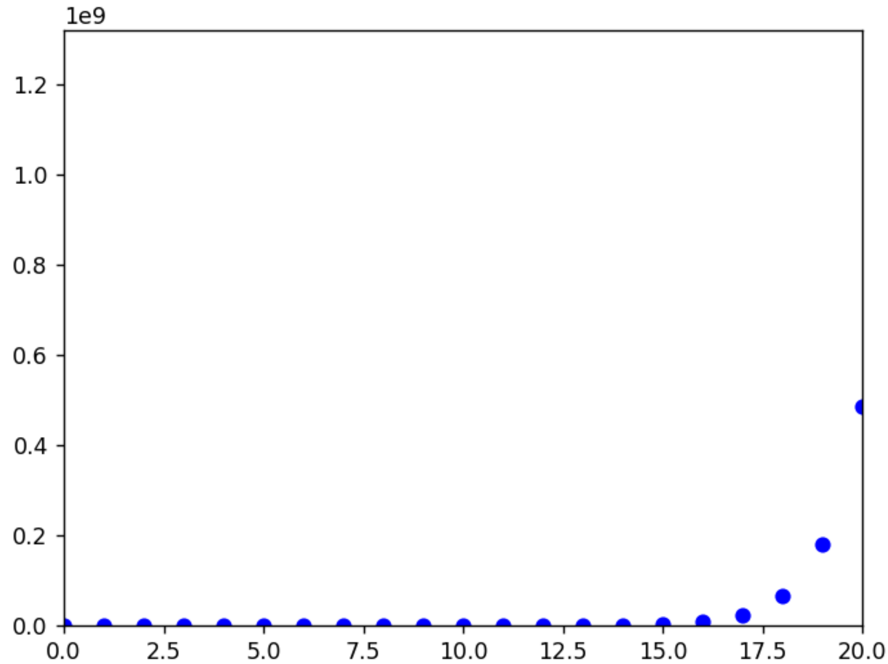
1.

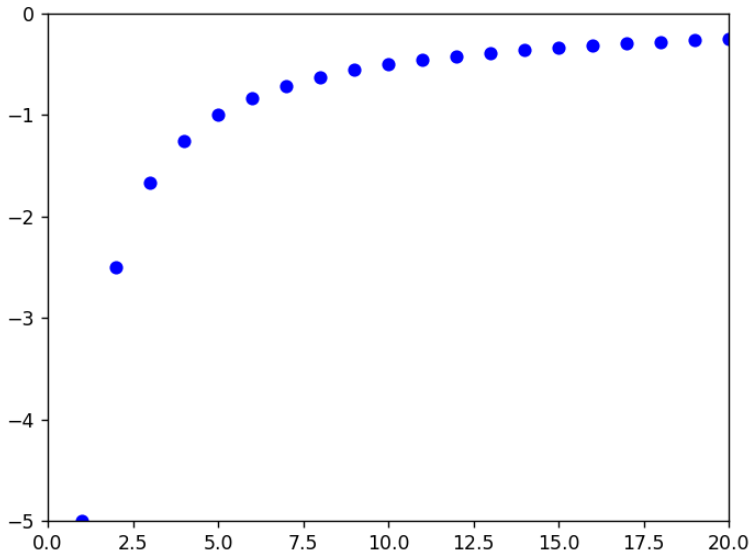
Soit $n \in \mathbb{N}$, $u_n = e^n > 0$

$$\frac{u_{n+1}}{u_n} = \frac{e^{n+1}}{e^n} = \frac{e^n \times 2}{e^n} = e \approx 2{,}718$$

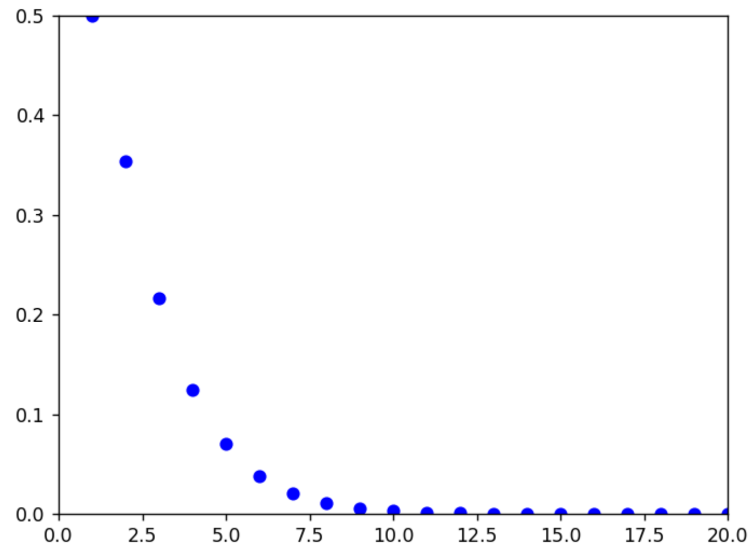
$$\text{donc } \frac{u_{n+1}}{u_n} > 1$$

J'en déduis que la suite (u_n) est croissante.



	2.	Soit $n \in \mathbb{N}^*, u_n = \frac{-5}{n}$ $$u_{n+1} - u_n = \frac{-5}{n+1} - \left(\frac{-5}{n}\right)$$ $$u_{n+1} - u_n = \frac{-5}{n+1} + \frac{5}{n}$$ $$u_{n+1} - u_n = \frac{-5 \times n}{(n+1) \times n} + \frac{5 \times (n+1)}{n \times (n+1)}$$ $$u_{n+1} - u_n = \frac{-5n + 5n + 5}{n(n+1)}$$ $$u_{n+1} - u_n = \frac{5}{n(n+1)} > 0$$ J'en déduis que la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ est strictement croissante. 

	3.	**Méthode n°1 :** Soit $n \in \mathbb{N}^*$, $u_n = \frac{\sqrt{n}}{2^n} > 0$ $$\frac{u_{n+1}}{u_n} = \frac{\frac{\sqrt{n+1}}{2^{n+1}}}{\frac{\sqrt{n}}{2^n}}$$ $$\frac{u_{n+1}}{u_n} = \frac{\sqrt{n+1}}{2^{n+1}} \times \frac{2^n}{\sqrt{n}}$$ $$\frac{u_{n+1}}{u_n} = \sqrt{\frac{n+1}{n}} \times \frac{1}{2}$$ $$\frac{u_{n+1}}{u_n} = \sqrt{1+\frac{1}{n}} \times \frac{1}{2}$$ $$\text{or } \sqrt{1+\frac{1}{n}} \times \frac{1}{2} > 1$$ $$\Leftrightarrow \sqrt{1+\frac{1}{n}} > 2$$ $$\Leftrightarrow 1+\frac{1}{n} > 4 \ \text{ car } 1+\frac{1}{n} > 0$$ $$\Leftrightarrow \frac{1}{n} > 3$$ $$\Leftrightarrow n < \frac{1}{3}$$ $$\text{donc } \forall n \in \mathbb{N}^*, \ \frac{u_{n+1}}{u_n} < 1$$ J’en déduis que la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ est décroissante.



Méthode n°2 :

Soit $n \in \mathbb{N}^*$, $u_n = \frac{\sqrt{n}}{2^n}$

$$u_{n+1} - u_n = \frac{\sqrt{n+1}}{2^{n+1}} - \frac{\sqrt{n}}{2^n}$$

$$u_{n+1} - u_n = \frac{\sqrt{n+1}}{2^{n+1}} - \frac{2 \times \sqrt{n}}{2 \times 2^n}$$

$$u_{n+1} - u_n = \frac{\sqrt{n+1} - 2\sqrt{n}}{2^{n+1}}$$

$$u_{n+1} - u_n = \frac{\left(\sqrt{n+1} - 2\sqrt{n}\right)\left(\sqrt{n+1} + 2\sqrt{n}\right)}{2^{n+1} \times \left(\sqrt{n+1} + 2\sqrt{n}\right)}$$

$$u_{n+1} - u_n = \frac{n + 1 - 4n}{2^{n+1} \times \left(\sqrt{n+1} + 2\sqrt{n}\right)}$$

$$u_{n+1} - u_n = \frac{1 - 3n}{2^{n+1} \times \left(\sqrt{n+1} + 2\sqrt{n}\right)}$$

$$\text{or } \ 1 - 3n > 0$$

$$\Leftrightarrow -3n > -1$$

$$\Leftrightarrow n < \frac{1}{3}$$

$$\text{donc } \forall n \in \mathbb{N}^*, \ \ u_{n+1} - u_n < 0$$

J'en déduis que la suite $(u_n)_{n \in \mathbb{N}^*}$ est décroissante.

	4.	Soit $n \in \mathbb{N}, u_n = \frac{7^n}{3^n} > 0$ $$\frac{u_{n+1}}{u_n} = \frac{\frac{7^{n+1}}{3^{n+1}}}{\frac{7^n}{3^n}}$$ $$\frac{u_{n+1}}{u_n} = \frac{7^{n+1}}{3^{n+1}} \times \frac{3^n}{7^n}$$ $$\frac{u_{n+1}}{u_n} = \frac{7}{3} > 1$$ J'en déduis que la suite (u_n) est strictement croissante.