Terminale Spécialité Mathématiques

Tâche n° 5

Démontrer une limite à l'aide de la définition

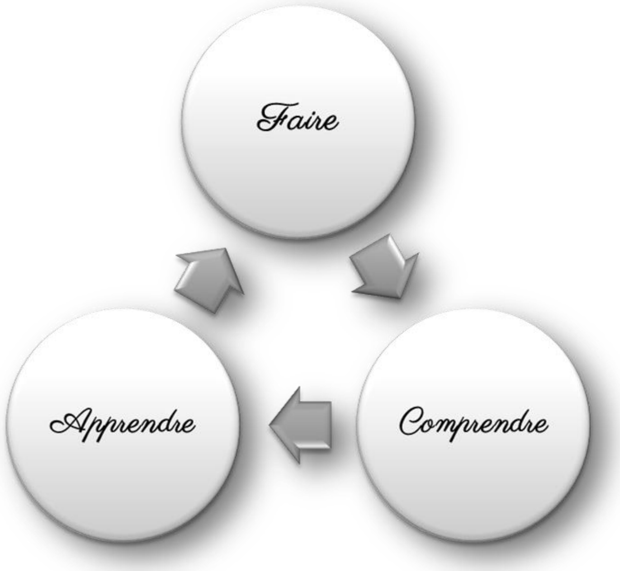

Table des matières

Tâche n° $\boxed{5}$
Démontrer une limite à l'aide de la définition
Enoncé des exercices

Exercice 1.

Démontrer, à l'aide de la définition, la limite de la suite définie par :

$$\forall n \in \mathbb{N}, u_n = 3n - 1$$

Exercice 2.

Démontrer, à l'aide de la définition, la limite de la suite définie par :

$$\forall n \in \mathbb{N}, u_n = n^2$$

Exercice 3.

Démontrer, à l'aide de la définition, la limite de la suite définie par :

$$\forall n \in \mathbb{N}, u_n = 2n^3 + 3$$

Exercice 4.

Démontrer, à l'aide de la définition, la limite de la suite définie par :

$$\forall n \in \mathbb{N}, u_n = 4\sqrt{n} - 5$$

Exercice 5.

Démontrer, à l'aide de la définition, la limite de la suite définie par :

$$\forall n \in \mathbb{N}, u_n = -2n + 5$$

Exercice 6.

Démontrer, à l'aide de la définition, la limite de la suite définie par :

$$\forall n \in \mathbb{N}, u_n = 4 - 3n^2$$

Exercice 7.

Démontrer, à l'aide de la définition, la limite de la suite définie par :

$$\forall n \in \mathbb{N}^*, u_n = \frac{1}{n}$$

Exercice 8.

Démontrer, à l'aide de la définition, la limite de la suite définie par :

$$\forall n \in \mathbb{N}^*, u_n = 6 - \frac{1}{n}$$

Tâche n° $\boxed{5}$
Démontrer une limite à l'aide de la définition
Correction des exercices

Correction de l'exercice 1.

Démontrer, à l'aide de la définition, la limite de la suite définie par :

$$\forall n \in \mathbb{N}, u_n = 3n - 1$$

Exercice 1.	Je conjecture que $\lim\limits_{n \to +\infty} 3n - 1 = +\infty$ Démonstration : Soit $A \in \mathbb{R}$ fixé arbitrairement, $$3n - 1 > A$$ $$\Leftrightarrow 3n > A + 1$$ $$\Leftrightarrow n > \frac{A+1}{3}$$ Il existe un rang $N = E\left(\frac{A+1}{3}\right) + 1 \in \mathbb{N}$ tel que pour tout $n \in \mathbb{N}$ avec $n > N$ alors $3n - 1 > A$ On en déduit que $\lim\limits_{n \to +\infty} 3n - 1 = +\infty$

Correction de l'exercice 2.

Démontrer, à l'aide de la définition, la limite de la suite définie par :

$$\forall n \in \mathbb{N}, u_n = n^2$$

Exercice 2.	Soit $A \in \mathbb{R}$ fixé arbitrairement, $$n^2 > A$$ $$\Leftrightarrow n > \sqrt{A} \text{ ou } \underbrace{n < -\sqrt{A}}_{exclu}$$ Il existe un rang $N = E\left(\sqrt{A}\right) + 1 \in \mathbb{N}$ tel que pour tout $n \in \mathbb{N}$ avec $n > N > \sqrt{A}$ alors $n^2 > A$ On en déduit que $\lim\limits_{n \to +\infty} n^2 = +\infty$

Correction de l'exercice 3.

Démontrer, à l'aide de la définition, la limite de la suite définie par :

$$\forall n \in \mathbb{N}, u_n = 2n^3 + 3$$

Exercice 3.	$\lim\limits_{n\to+\infty} 2n^3 + 3 = +\infty$ car Soit $A \in \mathbb{R}$ fixé arbitrairement, $$2n^3 + 3 > A$$ $$\Leftrightarrow 2n^3 > A - 3$$ $$\Leftrightarrow n^3 > \frac{A-3}{2}$$ $$\Leftrightarrow n > \sqrt[3]{\frac{A-3}{2}}$$ Il existe un rang $N \in \mathbb{N}$ tel que $N = E\left(\sqrt[3]{\frac{A-3}{2}}\right) + 1 \in \mathbb{N}$ pour tout $n \in \mathbb{N}$ avec $n > N > \sqrt[3]{\frac{A-3}{2}}$ alors $n^3 > \frac{A-3}{2} \Leftrightarrow 2n^3 + 3 > A$ On en déduit que $\lim\limits_{n\to+\infty} 2n^3 + 3 = +\infty$

Correction de l'exercice 4.

Démontrer, à l'aide de la définition, la limite de la suite définie par :

$$\forall n \in \mathbb{N}, u_n = 4\sqrt{n} - 5$$

Exercice 4.	$\lim\limits_{n\to+\infty} 4\sqrt{n}-5=+\infty$ car Soit $A\in\mathbb{R}$ fixé arbitrairement, $4\sqrt{n}-5>A$ $\Leftrightarrow 4\sqrt{n}>A+5$ $\Leftrightarrow \sqrt{n}>\dfrac{A+5}{4}$ $\Leftrightarrow n>\left(\dfrac{A+5}{4}\right)^2$ Il existe un rang $N\in\mathbb{N}$ tel que $N=E\left(\left(\frac{A+5}{4}\right)^2\right)+1$ pour tout $n\in\mathbb{N}$ avec $n>N>\left(\frac{A+5}{4}\right)^2$ alors $\sqrt{n}>\frac{A+5}{4}\Leftrightarrow 4\sqrt{n}-5>A$ On en déduit que $\lim\limits_{n\to+\infty} 4\sqrt{n}-5=+\infty$

Correction de l'exercice 5.

Démontrer, à l'aide de la définition, la limite de la suite définie par :

$$\forall n\in\mathbb{N}, u_n=-2n+5$$

Exercice 5.	$\lim\limits_{n\to+\infty} -2n+5=-\infty$ car Soit $A\in\mathbb{R}$ fixé arbitrairement, $-2n+5<A$ $\Leftrightarrow -2n<A-5$ $\Leftrightarrow n>\dfrac{A-5}{-2}=\dfrac{5-A}{2}$ Il existe un rang $N\in\mathbb{N}$ tel que $N=E\left(\frac{5-A}{2}\right)+1$ pour tout $n\in\mathbb{N}$ avec $n>N>\frac{5-A}{2}$ alors $2n>5-A\Leftrightarrow 2n-5>-A\Leftrightarrow -2n+5<A$ On en déduit que $\lim\limits_{n\to+\infty} -2n+5=-\infty$

Correction de l'exercice 6.

Démontrer, à l'aide de la définition, la limite de la suite définie par :

$$\forall n\in\mathbb{N}, u_n=4-3n^2$$

Exercice 6.	$\lim_{n\to+\infty} 4-3n^2 = -\infty$ car Soit $A \in \mathbb{R}^-$ fixé arbitrairement, $$4-3n^2 < A$$ $$\Leftrightarrow -3n^2 < A-4 < 0$$ $$\Leftrightarrow n^2 > \frac{A-4}{-3} > 0$$ $$\Leftrightarrow n > \sqrt{\frac{A-4}{-3}} \text{ ou } \underbrace{n < -\sqrt{\frac{A-4}{-3}}}_{exclu}$$ Il existe un rang $N \in \mathbb{N}$ tel que $N = E\left(\sqrt{\frac{A-4}{-3}}\right)+1$ pour tout $n \in \mathbb{N}$ avec $n > N > \sqrt{\frac{A-4}{-3}}$ alors $4-3n^2 < A$ On en déduit que $\lim_{n\to+\infty} 4-3n^2 = -\infty$

Correction de l'exercice 7.

Démontrer, à l'aide de la définition, la limite de la suite définie par :

$$\forall n \in \mathbb{N}, u_n = \frac{1}{n}$$

Exercice 7.	$\lim\limits_{n\to+\infty} \frac{1}{n} = 0$ car Soit $\varepsilon > 0$ fixé arbitrairement, $$-\varepsilon < \frac{1}{n} < \varepsilon$$ $$0 < \frac{1}{n} < \varepsilon$$ $$\Leftrightarrow n > \frac{1}{\varepsilon} > 0 \text{ car la fonction inverse est décroissante sur }]0;+\infty[$$ Il existe un rang $N \in \mathbb{N}$ tel que $N = E\left(\frac{1}{\varepsilon}\right) + 1$ pour tout $n \in \mathbb{N}$ avec $n > N > \frac{1}{\varepsilon}$ alors $-\varepsilon < 0 < \frac{1}{n} < \varepsilon$ On en déduit que $\lim\limits_{n\to+\infty} \frac{1}{n} = 0$

Correction de l'exercice 8.

Démontrer, à l'aide de la définition, la limite de la suite définie par :

$$\forall n \in \mathbb{N}, u_n = 6 - \frac{1}{n}$$

Exercice 8.	$\lim\limits_{n\to+\infty} 6-\dfrac{1}{n}=6$ car Soit $\varepsilon>0$ fixé arbitrairement, $$6-\varepsilon<6-\frac{1}{n}<6+\varepsilon$$ $$\Leftrightarrow -\varepsilon<-\frac{1}{n}<\varepsilon$$ $$\Leftrightarrow -\varepsilon<-\frac{1}{n}<0$$ $$\Leftrightarrow -\frac{1}{\varepsilon}>-n \text{ car la fonction inverse est décroissante sur }]0;+\infty[$$ $$\Leftrightarrow \frac{1}{\varepsilon}<n$$ Il existe un rang $N=E\left(\frac{1}{\varepsilon}\right)+1\in\mathbb{N}$ pour tout $n\in\mathbb{N}$ avec $n>N$ alors $$6-\varepsilon<6-\frac{1}{n}<6+\varepsilon$$ On en déduit que $\lim\limits_{n\to+\infty} 6-\frac{1}{n}=6$