Terminale Spécialité Mathématiques
Tâche n° 6
Déterminer une limite à l’aide des opérations

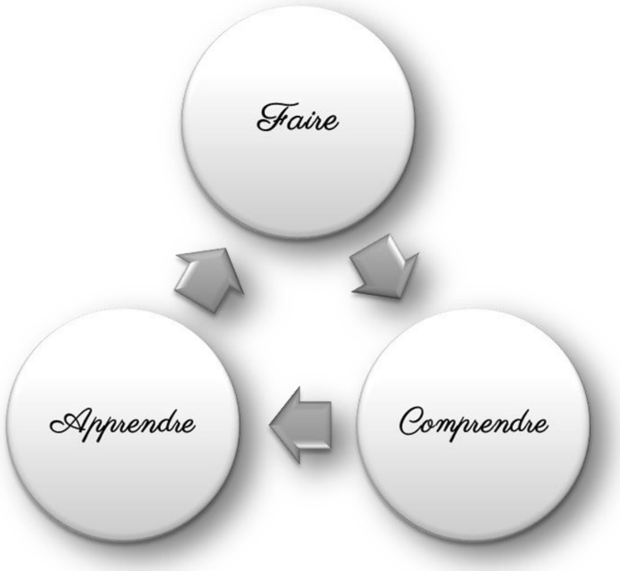

Table des matières

Tâche n° $\boxed{6}$
Déterminer une limite à l'aide des opérations
Enoncé des exercices

Exercice 1.

Déterminer, en justifiant, la limite de la suite (u_n) dans les cas ci-dessous :

▶1. Pour tout $n \in \mathbb{N},\ u_n = n^3 + 3n - 1$

▶2. Pour tout $n \in \mathbb{N},\ u_n = \dfrac{n+1}{3n-1}$.

Exercice 2.

Etudier les limites des suites ci-dessous :

▶1. Pour tout $n \in \mathbb{N},\ u_n = 2 - n^3 - 5n^2$,

▶2. Pour tout $n \in \mathbb{N},\ u_n = \dfrac{n^2+2}{3n^2-n-1}$.

Exercice 3.

Déterminer, en justifiant, la limite de la suite (u_n) dans les cas ci-dessous :

▶1. $\forall n \in \mathbb{N},\ u_n = 2n^3 - 3n + 1$

▶2. $\forall n \in \mathbb{N},\ u_n = -5n - \dfrac{\sqrt{n}}{4} - 1$

▶3. $\forall n \in \mathbb{N},\ u_n = \dfrac{3}{\sqrt{n^2+1}}$

▶4. $\forall n \in \mathbb{N},\ u_n = \dfrac{2n-1}{3n^2+1}$

Exercice 4.

Déterminer, en justifiant, la limite de la suite (u_n) dans les cas ci-dessous :

▶1. $\forall n \in \mathbb{N},\ u_n = 5n - 3n^3 - 17$

▶2. $\forall n \in \mathbb{N},\ u_n = -5\sqrt{n+1} - n^2$

▶3. $\forall n \in \mathbb{N},\ u_n = \sqrt{n}\,(3 - 2n)$

▶4. $\forall n \in \mathbb{N},\ u_n = \dfrac{1-6n^2}{2n+5}$

Tâche n° $\boxed{6}$
Déterminer une limite à l'aide des opérations
Correction des exercices

Correction de l'exercice 1.

Déterminer, en justifiant, la limite de la suite (u_n) dans les cas ci-dessous :

▶1. Pour tout $n \in \mathbb{N}$, $u_n = n^3 + 3n - 1$

▶2. Pour tout $n \in \mathbb{N}$, $u_n = \frac{n+1}{3n-1}$

Exercice 1.	$\left.\begin{array}{l}\lim\limits_{n\to+\infty} n^3 = +\infty \\ \lim\limits_{n\to+\infty} 3n-1 = +\infty\end{array}\right\}$ alors par addition $\lim\limits_{n\to+\infty} n^3 + 3n - 1 = +\infty$
	$\left.\begin{array}{l}\lim\limits_{n\to+\infty} n+1 = +\infty \\ \lim\limits_{n\to+\infty} 3n-1 = +\infty\end{array}\right\}$ alors par quotient la forme est indéterminée $\forall n \in \mathbb{N}^*, u_n = \dfrac{n+1}{3n-1} = \dfrac{n\left(1+\frac{1}{n}\right)}{n\left(3-\frac{1}{n}\right)} = \dfrac{1+\frac{1}{n}}{3-\frac{1}{n}}$ $\left.\begin{array}{l}\lim\limits_{n\to+\infty} 1+\dfrac{1}{n} = 1 \\ \lim\limits_{n\to+\infty} 3-\dfrac{1}{n} = 3\end{array}\right\}$ alors par quotient $\lim\limits_{n\to+\infty} \dfrac{n+1}{3n-1} = \dfrac{1}{3}$

Correction de l'exercice 2.

Etudier les limites des suites ci-dessous :

▶1. Pour tout $n \in \mathbb{N}$, $u_n = 2 - n^3 - 5n^2$,

▶2. Pour tout $n \in \mathbb{N}$, $u_n = \dfrac{n^2+2}{3n^2-n-1}$.

Exercice 2.	$\left.\begin{array}{l}\lim\limits_{n\to+\infty} 2-n^3 = -\infty \\ \lim\limits_{n\to+\infty} -5n^2 = -\infty\end{array}\right\}$ alors par addition $\lim\limits_{n\to+\infty} 2 - n^3 - 5n^2 = -\infty$

	$\left.\begin{array}{l}\lim\limits_{n\to+\infty} n^2+2=+\infty \\ \left.\begin{array}{l}\lim\limits_{n\to+\infty} 3n^2=+\infty \\ \lim\limits_{n\to+\infty} -n-1=-\infty\end{array}\right\}\text{forme indéterminée par addition}\end{array}\right\}$ $\forall n\in\mathbb{N}^*, u_n=\dfrac{n^2+2}{3n^2-n-1}=\dfrac{n^2\left(1+\frac{2}{n^2}\right)}{n^2\left(3-\frac{1}{n}-\frac{1}{n^2}\right)}=\dfrac{1+\frac{2}{n^2}}{3-\frac{1}{n}-\frac{1}{n^2}}$ $\left.\begin{array}{l}\lim\limits_{n\to+\infty} 1+\dfrac{2}{n^2}=1 \\ \lim\limits_{n\to+\infty} 3-\dfrac{1}{n}-\dfrac{1}{n^2}=3\end{array}\right\}\text{alors par quotient } \lim\limits_{n\to+\infty}\dfrac{n^2+2}{3n^2-n-1}=\dfrac{1}{3}$

Correction de l'exercice 3.

Déterminer, en justifiant, la limite de la suite (u_n) dans les cas ci-dessous :

▶1. $\forall n\in\mathbb{N},\ u_n=2n^3-3n+1$

▶2. $\forall n\in\mathbb{N},\ u_n=-5n-\dfrac{\sqrt{n}}{4}-1$

▶3. $\forall n\in\mathbb{N},\ u_n=\dfrac{3}{\sqrt{n^2+1}}$

▶4. $\forall n\in\mathbb{N},\ u_n=\dfrac{2n-1}{3n^2+1}$

Exercice 3.	**1.**	$\left.\begin{array}{l}\lim\limits_{n\to+\infty} 2n^3=+\infty \\ \lim\limits_{n\to+\infty} -3n+1=-\infty\end{array}\right\}\text{alors par somme la forme est indéterminée}$ $\forall n\in\mathbb{N}^*, u_n=n^3\left(2-\dfrac{3}{n^2}+\dfrac{1}{n^3}\right)$ $\left.\begin{array}{l}\lim\limits_{n\to+\infty} n^3=+\infty \\ \lim\limits_{n\to+\infty} 2-\dfrac{3}{n^2}+\dfrac{1}{n^3}=2\end{array}\right\}\text{alors par produit } \lim\limits_{n\to+\infty} 2n^3-3n+1=+\infty$
	2.	$\left.\begin{array}{l}\lim\limits_{n\to+\infty} -5n=-\infty \\ \lim\limits_{n\to+\infty} -\dfrac{\sqrt{n}}{4}-1=-\infty\end{array}\right\}\text{alors par somme } \lim\limits_{n\to+\infty} -5n-\dfrac{\sqrt{n}}{4}-1=-\infty$
	3.	$\lim\limits_{n\to+\infty}\sqrt{n^2+1}=+\infty$ donc, par quotient, $\lim\limits_{n\to+\infty}\dfrac{3}{\sqrt{n^2+1}}=0$

	4.	$\left.\begin{array}{r}\lim\limits_{n\to+\infty} 2n-1=+\infty \\ \lim\limits_{n\to+\infty} 3n^2+1=+\infty\end{array}\right\}$ alors par quotient la forme est indéterminée $\forall n\in\mathbb{N}^*, u_n=\dfrac{2n-1}{3n^2+1}=\dfrac{n\left(2-\frac{1}{n}\right)}{n\left(3n+\frac{1}{n}\right)}=\dfrac{2-\frac{1}{n}}{3n+\frac{1}{n}}$ $\left.\begin{array}{r}\lim\limits_{n\to+\infty} 2-\dfrac{1}{n}=2 \\ \lim\limits_{n\to+\infty} 3n+\dfrac{1}{n}=+\infty\end{array}\right\}$ alors par quotient $\lim\limits_{n\to+\infty}\dfrac{2n-1}{3n^2+1}=0$

Correction de l'exercice 4.

Déterminer, en justifiant, la limite de la suite (u_n) dans les cas ci-dessous :

▶1. $\forall n\in\mathbb{N},\ u_n=5n-3n^3-17$

▶2. $\forall n\in\mathbb{N},\ u_n=-5\sqrt{n+1}-n^2$

▶3. $\forall n\in\mathbb{N},\ u_n=\sqrt{n}\,(3-2n)$

▶4. $\forall n\in\mathbb{N},\ u_n=\dfrac{1-6n^2}{2n+5}$

Exercice 4.	**1.**	$\left.\begin{array}{r}\lim\limits_{n\to+\infty} 5n=+\infty \\ \lim\limits_{n\to+\infty} -3n^3-17=-\infty\end{array}\right\}$ alors par somme la forme est indéterminée $\forall n\in\mathbb{N}^*, u_n=n^3\left(\dfrac{5}{n^2}-3-\dfrac{17}{n^3}\right)$ $\left.\begin{array}{r}\lim\limits_{n\to+\infty} n^3=+\infty \\ \lim\limits_{n\to+\infty} \dfrac{5}{n^2}-3-\dfrac{17}{n^3}=-3\end{array}\right\}$ alors par produit $\lim\limits_{n\to+\infty} 5n-3n^3-17=-\infty$
	2.	$\left.\begin{array}{r}\lim\limits_{n\to+\infty} -5\sqrt{n+1}=-\infty \\ \lim\limits_{n\to+\infty} n^2=+\infty\end{array}\right\}$ alors par différence $\lim\limits_{n\to+\infty} -5\sqrt{n+1}-n^2=-\infty$
	3.	$\left.\begin{array}{r}\lim\limits_{n\to+\infty} \sqrt{n}=+\infty \\ \lim\limits_{n\to+\infty} 3-2n=-\infty\end{array}\right\}$ alors par produit $\lim\limits_{n\to+\infty} \sqrt{n}\,(3-2n)=-\infty$

	4.	$\left.\begin{array}{l}\lim\limits_{n\to+\infty} 1-6n^2=-\infty\\ \lim\limits_{n\to+\infty} 2n+5=+\infty\end{array}\right\}$ alors par quotient la forme est indéterminée $\forall n\in\mathbb{N}^*, u_n=\dfrac{1-6n^2}{2n+5}=\dfrac{n\left(\frac{1}{n}-6n\right)}{n\left(3+\frac{5}{n}\right)}=\dfrac{\frac{1}{n}-6n}{3+\frac{5}{n}}$ $\left.\begin{array}{l}\lim\limits_{n\to+\infty}\dfrac{1}{n}-6n=+\infty\\ \lim\limits_{n\to+\infty}3+\dfrac{5}{n}=3\end{array}\right\}$ alors par quotient $\lim\limits_{n\to+\infty}\dfrac{1-6n^2}{2n+5}=+\infty$