Terminale Spécialité Mathématiques
Tâche n° 7
Cas particulier de la racine carrée …

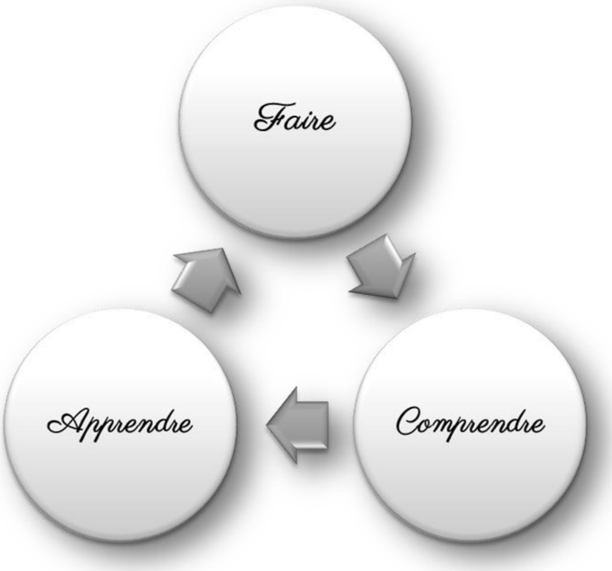

Table des matières

Tâche n° $\boxed{7}$
Cas particulier de la racine carrée …
Enoncé des exercices

Exercice 1.

Déterminer la limite de la suite définie par :

$$\forall n \in \mathbb{N}^*, u_n = \sqrt{3n-1} - \sqrt{3n}$$

Exercice 2.

Déterminer la limite de la suite définie par :

$$\forall n \in \mathbb{N}, u_n = \frac{2}{\sqrt{5n+1} - \sqrt{5n}}$$

Exercice 3.

Déterminer la limite de la suite définie par :

$$\forall n \in \mathbb{N}, u_n = \sqrt{n^2+n} - n$$

Exercice 4.

Déterminer la limite de la suite définie par :

$$\forall n \in \mathbb{N}, u_n = \sqrt{2n+1} - \sqrt{n}$$

Tâche n° $\boxed{7}$
Cas particulier de la racine carrée …
Correction des exercices

Correction de l'exercice 1.

Déterminer la limite de la suite définie par :

$$\forall n \in \mathbb{N}^*, u_n = \sqrt{3n-1} - \sqrt{3n}$$

Exercice 1.

$$\forall n \in \mathbb{N}^*, u_n = \sqrt{3n-1} - \sqrt{3n}$$

$$\left.\begin{array}{r}\lim\limits_{n\to+\infty} \sqrt{3n-1} = +\infty \\ \lim\limits_{n\to+\infty} \sqrt{3n} = +\infty\end{array}\right\} \text{donc, par différence, il y a forme indéterminée}$$

$$\forall n \in \mathbb{N}^*, u_n = \sqrt{3n-1} - \sqrt{3n}$$

$$u_n = \frac{\left(\sqrt{3n-1} - \sqrt{3n}\right) \times \left(\sqrt{3n-1} + \sqrt{3n}\right)}{\sqrt{3n-1} + \sqrt{3n}}$$

$$u_n = \frac{\sqrt{3n-1}^2 - \sqrt{3n}^2}{\sqrt{3n-1} + \sqrt{3n}}$$

$$u_n = \frac{3n-1-3n}{\sqrt{3n-1} + \sqrt{3n}}$$

$$u_n = \frac{-1}{\sqrt{3n-1} + \sqrt{3n}}$$

or $\lim\limits_{n\to+\infty} \sqrt{3n-1} + \sqrt{3n} = +\infty$

donc, par quotient, $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n = 0$

Correction de l'exercice 2.

Démontrer la limite de la suite définie par :

$$\forall n \in \mathbb{N}, u_n = \frac{2}{\sqrt{5n+1} - \sqrt{5n}}$$

Exercice 2.	$$\forall n \in \mathbb{N}^*, u_n = \frac{2}{\sqrt{5n+1}-\sqrt{5n}}$$ $\left.\begin{array}{r}\lim\limits_{n\to+\infty} \sqrt{5n+1} = +\infty \\ \lim\limits_{n\to+\infty} \sqrt{5n} = +\infty\end{array}\right\}$ donc, par différence, il y a forme indéterminée $\forall n \in \mathbb{N}^*, u_n = \dfrac{2}{\sqrt{5n+1}-\sqrt{5n}}$ $u_n = \dfrac{2\times\left(\sqrt{5n+1}+\sqrt{5n}\right)}{\left(\sqrt{5n+1}-\sqrt{5n}\right)\times\left(\sqrt{5n+1}+\sqrt{5n}\right)}$ $u_n = \dfrac{2\times\left(\sqrt{5n+1}+\sqrt{5n}\right)}{5n+1-5n}$ $u_n = \dfrac{2\times\left(\sqrt{5n+1}+\sqrt{5n}\right)}{1}$ $u_n = 2\left(\sqrt{5n+1}+\sqrt{5n}\right)$ or $\lim\limits_{n\to+\infty} \sqrt{5n+1} = +\infty$ et $\lim\limits_{n\to+\infty} \sqrt{5n} = +\infty$ donc, par somme, $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n = +\infty$

Correction de l'exercice 3.

Démontrer la limite de la suite définie par :

$$\forall n \in \mathbb{N}, u_n = \sqrt{n^2+n}-n$$

Exercice 3.

$$\forall n \in \mathbb{N}, u_n = \sqrt{n^2+n} - n$$

$$\left.\begin{array}{r}\lim\limits_{n\to+\infty} \sqrt{n^2+n} = +\infty \\ \lim\limits_{n\to+\infty} -n = -\infty\end{array}\right\}\text{donc, par somme, il y a forme indéterminée}$$

$\forall n \in \mathbb{N}^*, u_n = \sqrt{n^2+n} - n$

$$u_n = \frac{\left(\sqrt{n^2+n} - n\right) \times \left(\sqrt{n^2+n} + n\right)}{\sqrt{n^2+n} + n}$$

$$u_n = \frac{n^2+n-n^2}{\sqrt{n^2+n}+n}$$

$$u_n = \frac{n}{\sqrt{n^2+n}+n}$$

Il y a toujours la FI mais elle n'est plus liée à la racine carrée mais au quotient, la technique habituelle de factorisation devrait fonctionner.

$$u_n = \frac{n}{n\left(\frac{\sqrt{n^2+n}}{n} + \frac{n}{n}\right)}$$

$$u_n = \frac{n}{n\left(\frac{\sqrt{n^2+n}}{\sqrt{n^2}} + 1\right)}$$

$$u_n = \frac{n}{n\left(\sqrt{\frac{n^2+n}{n^2}} + 1\right)}$$

$$u_n = \frac{n}{n\left(\sqrt{\frac{n^2}{n^2} + \frac{n}{n^2}} + 1\right)}$$

$$u_n = \frac{n}{n\left(\sqrt{1+\frac{1}{n}} + 1\right)}$$

$$u_n = \frac{1}{\sqrt{1+\frac{1}{n}} + 1}$$

or $\lim\limits_{n\to+\infty} 1 + \frac{1}{n} = 1$

$$\text{donc, par quotient,} \quad \lim_{n\to+\infty} u_n = \frac{1}{2}$$

Correction de l'exercice 4.

Démontrer la limite de la suite définie par :

$$\forall n \in \mathbb{N}, u_n = \sqrt{2n+1} - \sqrt{n}$$

Exercice 4.

$$\left.\begin{array}{r}\lim\limits_{n\to+\infty} \sqrt{2n+1} = +\infty \\ \lim\limits_{n\to+\infty} \sqrt{n} = +\infty\end{array}\right\}\text{donc, par différence, il y a forme indéterminée}$$

$$\forall n \in \mathbb{N}, u_n = \sqrt{2n+1} - \sqrt{n}$$

$$u_n = \frac{\left(\sqrt{2n+1} - \sqrt{n}\right) \times \left(\sqrt{2n+1} + \sqrt{n}\right)}{\sqrt{2n+1} + \sqrt{n}}$$

$$u_n = \frac{2n+1-n}{\sqrt{2n+1} + \sqrt{n}}$$

$$u_n = \frac{n+1}{\sqrt{2n+1} + \sqrt{n}}$$

Il y a toujours la FI mais elle n'est plus liée à la racine carrée mais au quotient, la technique habituelle de factorisation devrait fonctionner.

$$u_n = \frac{n\left(\frac{n}{n} + \frac{1}{n}\right)}{n\left(\frac{\sqrt{2n+1}}{n} + \frac{\sqrt{n}}{n}\right)}$$

$$u_n = \frac{n\left(1 + \frac{1}{n}\right)}{n\left(\sqrt{\frac{2n+1}{n^2}} + \sqrt{\frac{n}{n^2}}\right)}$$

$$u_n = \frac{1 + \frac{1}{n}}{\sqrt{\frac{2}{n} + \frac{1}{n^2}} + \sqrt{\frac{1}{n}}}$$

$$\left.\begin{array}{r}\lim\limits_{n\to+\infty} 1 + \frac{1}{n} = 1 \\ \lim\limits_{n\to+\infty} \sqrt{\frac{2}{n} + \frac{1}{n^2}} + \sqrt{\frac{1}{n}} = 0^+\end{array}\right\}\text{donc, par quotient , } \lim_{n\to+\infty} u_n = +\infty$$