Terminale Spécialité Mathématiques
Tâche n° $\boxed{8}$
Démontrer une égalité par récurrence

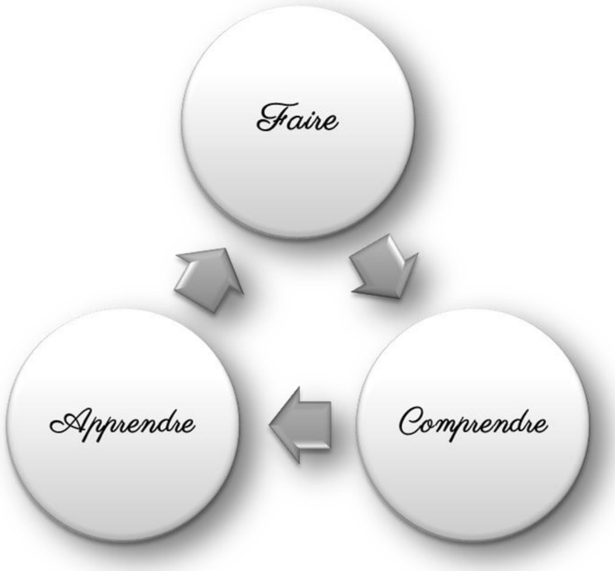

Table des matières

Tâche n° $\boxed{8}$
Démontrer une égalité par récurrence
Enoncé des exercices

Exercice 1.

La suite (u_n) est définie par $u_0 = 3$ et $u_{n+1} = \frac{1}{3}\, u_n + 1$ pour tout $n \in \mathbb{N}$.

a) Démontrer, par récurrence, que $u_n = \frac{1+3^n}{2\times 3^{n-1}}$ pour tout $n \in \mathbb{N}$.

b) En déduire la limite de la suite (u_n).

Exercice 2.

La suite (u_n) est définie par :

$$u_0 = 1 \ \text{ et } \ \forall n \in \mathbb{N}, \ \ u_{n+1} = \frac{u_n}{1+2u_n}$$

a) Démontrer, par récurrence, que $u_n = \frac{1}{2n+1}$ pour tout $n \in \mathbb{N}$.

b) En déduire la limite de la suite (u_n).

Exercice 3.

La suite (u_n) est définie par $u_0 = 5$ et $u_{n+1} = 10 - 2\, u_n$ pour tout $n \in \mathbb{N}$.

a) Démontrer, par récurrence, que $u_n = \frac{5}{3} \times (-2)^n + \frac{10}{3}$ pour tout $n \in \mathbb{N}$.

b) La suite (u_n) est-elle convergente ?

Exercice 4.

La suite (u_n) est définie par :

$$u_0 = 1 \ \text{ et } \ \forall n \in \mathbb{N}, \ \ u_{n+1} = \frac{u_n}{\sqrt{1+u_n^2}}$$

a) Démontrer, par récurrence, que $u_n = \frac{1}{\sqrt{n+1}}$ pour tout $n \in \mathbb{N}$.

b) En déduire la limite de la suite (u_n).

Tâche n° 8
Démontrer une égalité par récurrence
Correction des exercices

Correction de l'exercice 1.

La suite (u_n) est définie par $u_0 = 3$ et $u_{n+1} = \frac{1}{3}u_n + 1$ pour tout $n \in \mathbb{N}$.

a) Démontrer, par récurrence, que $u_n = \frac{1+3^n}{2\times 3^{n-1}}$ pour tout $n \in \mathbb{N}$.

b) En déduire la limite de la suite (u_n).

Exercice 1.	a)	
		Pour n un entier fixé arbitrairement, notons $\mathcal{P}(n)$ la proposition $u_n = \frac{1+3^n}{2\times 3^{n-1}}$ **Initialisation : pour $n = 0$** $$\frac{1+3^0}{2\times 3^{-1}} = \frac{1+1}{2\times\frac{1}{3}} = \frac{2}{2\times\frac{1}{3}} = 3 = u_0$$ donc $\mathcal{P}(0)$ est donc vraie. **Hérédité : Je suppose que $\mathcal{P}(n)$ est vraie pour un entier naturel n fixé arbitrairement** **Je suppose donc que $u_n = \frac{1+3^n}{2\times 3^{n-1}}$** $$u_{n+1} = \frac{1}{3}u_n + 1$$ $$u_{n+1} = \frac{1}{3}\times\frac{1+3^n}{2\times 3^{n-1}} + 1$$ $$u_{n+1} = \frac{1+3^n}{2\times 3^n} + \frac{2\times 3^n}{2\times 3^n}$$ $$u_{n+1} = \frac{1+3^n+2\times 3^n}{2\times 3^n}$$ $$u_{n+1} = \frac{1+3\times 3^n}{2\times 3^n}$$ $$u_{n+1} = \frac{1+3^{n+1}}{2\times 3^n}$$ donc $\mathcal{P}(n+1)$ est donc vraie. J'en déduis que **$\mathcal{P}(n)$ est vraie pour tout entier naturel n** $$\text{donc } \forall n \in \mathbb{N},\quad u_n = \frac{1+3^n}{2\times 3^{n-1}}$$

	b)	$$\forall n \in \mathbb{N},\quad u_n = \frac{(1+3^n)\times 3^{-n}}{2\times 3^{n-1}\times 3^{-n}}$$ $$u_n = \frac{3^{-n}+3^n\times 3^{-n}}{2\times 3^{n-1-n}}$$ $$u_n = \frac{3^{-n}+3^{n-n}}{2\times 3^{-1}}$$ $$u_n = \frac{3^{-n}+3^0}{2\times \frac{1}{3}}$$ $$u_n = \frac{3}{2}\times(3^{-n}+1)$$ $$\lim_{n\to+\infty} 3^{-n} = \lim_{n\to+\infty}\left(\frac{1}{3}\right)^n = 0$$ $$\text{donc } \lim_{n\to+\infty} u_n = \frac{3}{2}$$

Correction de l'exercice 2.

La suite (u_n) est définie par $u_0 = 1$ et $u_{n+1} = \frac{u_n}{1+2u_n}$ pour tout $n \in \mathbb{N}$.

a) Démontrer, par récurrence, que $u_n = \frac{1}{2n+1}$ pour tout $n \in \mathbb{N}$.

b) En déduire la limite de la suite (u_n).

Exercice 2.	a)	Pour n un entier fixé arbitrairement, notons $\mathcal{P}(n)$ la proposition $$u_n = \frac{1}{2n+1}$$ **Initialisation : pour $n = 0$** $$\frac{1}{2\times 0+1} = 1 = u_0$$ donc $\mathcal{P}(0)$ est donc vraie. **Hérédité : Je suppose que $\mathcal{P}(n)$ est vraie pour un entier naturel n fixé arbitrairement** **Je suppose donc que $u_n = \frac{1}{2n+1}$** $$u_{n+1} = \frac{u_n}{1+2u_n}$$ $$u_{n+1} = \frac{\frac{1}{2n+1}}{1+2\times\frac{1}{2n+1}}$$ $$u_{n+1} = \frac{\frac{1}{2n+1}}{\frac{2n+1}{2n+1}+\frac{2}{2n+1}}$$ $$u_{n+1} = \frac{\frac{1}{2n+1}}{\frac{2n+3}{2n+1}}$$ $$u_{n+1} = \frac{1}{2n+1}\times\frac{2n+1}{2n+3}$$ $$u_{n+1} = \frac{1}{2n+3} = \frac{1}{2(n+1)+1}$$ donc $\mathcal{P}(n+1)$ est donc vraie. J'en déduis que **$\mathcal{P}(n)$ est vraie pour tout entier naturel n** $$\text{donc } \forall n\in\mathbb{N},\ \ u_n = \frac{1}{2n+1}$$
	b)	$\lim\limits_{n\to+\infty} 2n+1 = +\infty$ donc $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n = 0$

Correction de l'exercice 3.

La suite (u_n) est définie par $u_0 = 5$ et $u_{n+1} = 10 - 2\,u_n$ pour tout $n \in \mathbb{N}$.

a) Démontrer, par récurrence, que $u_n = \frac{5}{3}\times(-2)^n + \frac{10}{3}$ pour tout $n\in\mathbb{N}$.

b) La suite (u_n) est-elle convergente ?

<table>
<tr><td rowspan="2">Exercice 2.</td><td>a)</td><td>
Pour n un entier fixé arbitrairement, notons $\mathcal{P}(n)$ la proposition

$$u_n = \frac{5}{3} \times (-2)^n + \frac{10}{3}$$

Initialisation : pour $n = 0$

$$\frac{5}{3} \times (-2)^0 + \frac{10}{3} = \frac{15}{3} = 5 = u_0$$

donc $\mathcal{P}(0)$ est donc vraie.

Hérédité : Je suppose que $\mathcal{P}(n)$ est vraie pour un entier naturel n fixé arbitrairement

Je suppose donc que $u_n = \frac{5}{3} \times (-2)^n + \frac{10}{3}$

$$u_{n+1} = 10 - 2\,u_n$$

$$u_{n+1} = 10 - 2\left(\frac{5}{3} \times (-2)^n + \frac{10}{3}\right)$$

$$u_{n+1} = 10 - 2 \times \frac{5}{3} \times (-2)^n - 2 \times \frac{10}{3}$$

$$u_{n+1} = \frac{30}{3} + \frac{5}{3} \times (-2)^{n+1} - \frac{20}{3}$$

$$u_{n+1} = \frac{5}{3} \times (-2)^{n+1} + \frac{10}{3}$$

donc $\mathcal{P}(n+1)$ est donc vraie.

J'en déduis que $\mathcal{P}(n)$ est vraie pour tout entier naturel n

$$\text{donc } \forall n \in \mathbb{N},\ \ u_n = \frac{5}{3} \times (-2)^n + \frac{10}{3}$$
</td></tr>
<tr><td>b)</td><td>(u_n) comme $(-2)^n$ est divergente</td></tr>
</table>

Correction de l'exercice 4.

La suite (u_n) est définie par :

$$u_0 = 1 \ \text{ et } \ \forall n \in \mathbb{N},\ \ u_{n+1} = \frac{u_n}{\sqrt{1 + u_n^2}}$$

a) Démontrer, par récurrence, que $u_n = \frac{1}{\sqrt{n+1}}$ pour tout $n \in \mathbb{N}$.

b) En déduire la limite de la suite (u_n).

<table>
<tr>
<td rowspan="2">Exercice 2.</td>
<td>a)</td>
<td>

Pour n un entier fixé arbitrairement, notons $\mathcal{P}(n)$ la proposition

$$u_n = \frac{5}{3} \times (-2)^n + \frac{10}{3}$$

Initialisation : pour $n = 0$

$$\frac{1}{\sqrt{0+1}} = 1 = u_0$$

donc $\mathcal{P}(0)$ est donc vraie.

Hérédité : Je suppose que $\mathcal{P}(n)$ est vraie pour un entier naturel n fixé arbitrairement

Je suppose donc que $u_n = \frac{1}{\sqrt{n+1}}$

$$u_{n+1} = \frac{u_n}{\sqrt{1+u_n^2}}$$

$$u_{n+1} = \frac{\frac{1}{\sqrt{n+1}}}{\sqrt{1+\left(\frac{1}{\sqrt{n+1}}\right)^2}}$$

$$u_{n+1} = \frac{\frac{1}{\sqrt{n+1}}}{\sqrt{\frac{n+1}{n+1}+\frac{1}{n+1}}}$$

$$u_{n+1} = \frac{\frac{1}{\sqrt{n+1}}}{\frac{\sqrt{n+2}}{\sqrt{n+1}}}$$

$$u_{n+1} = \frac{1}{\sqrt{n+1}} \times \frac{\sqrt{n+1}}{\sqrt{n+2}}$$

$$u_{n+1} = \frac{1}{\sqrt{n+2}}$$

donc $\mathcal{P}(n+1)$ est donc vraie.

J'en déduis que **$\mathcal{P}(n)$ est vraie pour tout entier naturel n**

$$\text{donc } \forall n \in \mathbb{N},\ \ u_n = \frac{1}{\sqrt{n+1}}$$

</td>
</tr>
<tr>
<td>b)</td>
<td>

$$\lim_{n\to+\infty} \sqrt{n+1} = +\infty \ \text{ donc } \ \lim_{n\to+\infty} u_n = 0$$

</td>
</tr>
</table>