Terminale Spécialité Mathématiques
Tâche n° 9
Démontrer une inégalité par récurrence

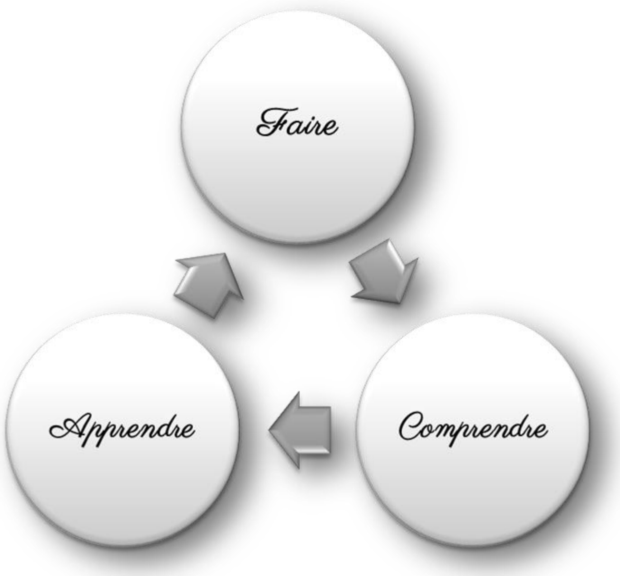

Table des matières

Enoncé des exercices 2
Exercice 1 2
Exercice 2 2
Exercice 3 2
Exercice 4 2
Correction des exercices 3
Correction de l'exercice 1. 3
Correction de l'exercice 2. 5
Correction de l'exercice 3. 6
Correction de l'exercice 4. 7

Tâche n° $\boxed{9}$
Démontrer une inégalité par récurrence
Enoncé des exercices

Exercice 1.

On considère la suite (u_n) est définie par $u_0 = 1$ et $u_{n+1} = \frac{1}{3}\, u_n + n - 2$ pour tout $n \in \mathbb{N}$.

a) Calculer u_1 , u_2 et u_3.
b) Démontrer par récurrence que, pour tout entier naturel $n \geq 4$, $u_n \geq 0$.
c) Démontrer que, pour tout entier naturel $n \geq 5$, $u_n \geq n - 3$.
d) En déduire la limite de la suite (u_n).

Exercice 2.

La suite (u_n) est définie par :

$$u_0 = 4 \ \text{ et } \ \forall n \in \mathbb{N}, \ \ u_{n+1} = 3 - \frac{4}{u_n + 1}$$

a) Démontrer, par récurrence, que $1 \leq u_{n+1} \leq u_n$ pour tout $n \in \mathbb{N}$.
b) Que peut-on en déduire concernant la suite (u_n) ?

Exercice 3.

La suite (u_n) est définie par $u_0 = -3$ et $u_{n+1} = \frac{9}{6 - u_n}$ pour tout $n \in \mathbb{N}$.

a) Démontrer, par récurrence, que $-3 \leq u_n \leq u_{n+1} \leq 3$ pour tout $n \in \mathbb{N}$.
b) Que peut-on en déduire concernant la suite (u_n) ?

Exercice 4.

La suite (u_n) est définie par :

$$u_0 = 1 \ \text{ et } \ \forall n \in \mathbb{N}, \ \ u_{n+1} = u_n + 2n + 3$$

a) Démontrer que la suite est monotone.
b) Démontrer par récurrence que, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $u_n > n^2$.
c) En déduire la limite de la suite (u_n).
d) Conjecturez une expression explicite de u_n en fonction de n puis démontrez votre conjecture.

Tâche n° 9
Démontrer une inégalité par récurrence
Correction des exercices

Correction de l'exercice 1.

On considère la suite (u_n) est définie par $u_0 = 1$ et $u_{n+1} = \frac{1}{3}\, u_n + n - 2$ pour tout $n \in \mathbb{N}$.

a) Calculer u_1 , u_2 et u_3.
b) Démontrer par récurrence que, pour tout entier naturel $n \geq 4$, $u_n \geq 0$.
c) Démontrer que, pour tout entier naturel $n \geq 5$, $u_n \geq n - 3$.
d) En déduire la limite de la suite (u_n).

<table>
<tr>
<td rowspan="2">Exercice 1.</td>
<td>a)</td>
<td>
Pour $n = 0$, $u_1 = \frac{1}{3}\, u_0 + 0 - 2 = \frac{1}{3} - 2 = -\frac{5}{3}$
Pour $n = 1$, $u_2 = \frac{1}{3}\, u_1 + 1 - 2 = \frac{1}{3} \times \left(-\frac{5}{3}\right) - 1 = -\frac{14}{9}$
Pour $n = 2$, $u_3 = \frac{1}{3}\, u_2 + 2 - 2 = \frac{1}{3} \times \left(-\frac{14}{9}\right) = -\frac{14}{27}$
</td>
</tr>
<tr>
<td>b)</td>
<td>
Pour n un entier fixé arbitrairement $n \geq 4$, notons $\mathcal{P}(n)$ la proposition $u_n \geq 0$
Initialisation : pour $n = 4$
$$u_4 = \frac{1}{3}\, u_3 + 3 - 2 = \frac{1}{3} \times \left(-\frac{14}{27}\right) + 1 = \frac{67}{81} \geq 0$$
donc $\mathcal{P}(4)$ est donc vraie.
Hérédité : Je suppose que $\mathcal{P}(n)$ est vraie pour un entier naturel n fixé arbitrairement $n \geq 4$
Je suppose donc que $u_n \geq 0$
$$\frac{1}{3}\, u_n \geq 0 \text{ et } n \geq 4$$
$$\Rightarrow \frac{1}{3}\, u_n + n \geq 0 + n \geq 4$$
$$\Rightarrow \frac{1}{3}\, u_n + n - 2 \geq 2$$
$$\Rightarrow u_{n+1} \geq 0$$
donc $\mathcal{P}(n+1)$ est donc vraie.
J'en déduis que $\mathcal{P}(n)$ est vraie pour tout entier naturel n
donc $\forall n \in \mathbb{N}, n \geq 4, \quad u_n \geq 0$
</td>
</tr>
</table>

	c)	**Méthode n°1 par récurrence :** Pour n un entier fixé arbitrairement $n \geq 5$, notons $\mathcal{P}(n)$ la proposition $u_n \geq n-3$ **Initialisation : pour $n = 5$** $$u_5 = \frac{1}{3}u_4 + 4 - 2 = \frac{1}{3} \times \frac{67}{81} + 2 = \frac{553}{243} > 2 \geq 5 - 3$$ donc $\mathcal{P}(5)$ est donc vraie. **Hérédité : Je suppose que $\mathcal{P}(n)$ est vraie pour un entier naturel n fixé arbitrairement $n \geq 5$** **Je suppose donc que $u_n \geq n-3$** $$\frac{1}{3}u_n \geq \frac{1}{3}(n-3)$$ $$\Longrightarrow \frac{1}{3}u_n + n - 2 \geq \frac{1}{3}n - \frac{3}{3} + n - 2$$ $$\Longrightarrow u_{n+1} \geq \frac{4}{3}n - 3$$ or $\underbrace{\frac{4}{3}n - 3}_{\text{ce que j'ai}} - \underbrace{(n+1-3)}_{\text{ce que je veux}} = \frac{4}{3}n - 3 - n + 2 = \frac{1}{3}n - 1$ puisque $n \geq 5$ $$\frac{1}{3}n - 1 \geq \frac{1}{3} \times 5 - 1 \geq \frac{2}{3} \geq 0$$ donc $u_{n+1} \geq \frac{4}{3}n - 3 \geq n + 1 - 3$ donc $\mathcal{P}(n+1)$ est donc vraie. J'en déduis que **$\mathcal{P}(n)$ est vraie pour tout entier naturel n** donc $\forall n \in \mathbb{N}, n \geq 5, \quad u_n \geq n-3$ **Méthode n°2 :** Je sais que $\forall n \in \mathbb{N}, n \geq 4, \quad u_n \geq 0$ donc $u_{n+1} = \frac{1}{3}u_n + n - 2 \geq n - 2$ Soit $p \in \mathbb{N}, p \geq 5$, en posant $n = p - 1$ alors $n \geq 4$, On sait que $u_{n+1} \geq n - 2$ donc $u_p \geq p - 1 - 2$ Donc, pour tout $p \in \mathbb{N}$, $p \geq 5, u_p \geq p - 3$
	d)	Puisque $\lim\limits_{n \to +\infty} n - 3 = +\infty$, alors par comparaison, $\lim\limits_{n \to +\infty} u_n = +\infty$

Correction de l'exercice 2.

La suite (u_n) est définie par :

$$u_0 = 4 \text{ et } \forall n \in \mathbb{N},\ u_{n+1} = 3 - \frac{4}{u_n + 1}$$

a) Démontrer, par récurrence, que $1 \leq u_{n+1} \leq u_n$ pour tout $n \in \mathbb{N}$.
b) Que peut-on en déduire concernant la suite (u_n) ?

<table>
<tr><td rowspan="2">Exercice 2.</td><td>a)</td><td>
Pour n un entier fixé arbitrairement, notons $\mathcal{P}(n)$ la proposition

$$1 \leq u_{n+1} \leq u_n$$

Initialisation : pour $n = 0$

$$u_0 = 4$$

$$u_1 = 3 - \frac{4}{u_0 + 1} = 3 - \frac{4}{4+1} = 2{,}2$$

donc $1 \leq u_1 \leq u_0$ et donc $\mathcal{P}(0)$ est donc vraie.

Hérédité : Je suppose que $\mathcal{P}(n)$ est vraie pour un entier naturel n fixé arbitrairement

Je suppose donc que $1 \leq u_{n+1} \leq u_n$

$$1 \leq u_{n+1} \leq u_n$$

$$\Rightarrow 2 \leq u_{n+1} + 1 \leq u_n + 1$$

$$\Rightarrow \frac{1}{2} \geq \frac{1}{u_{n+1} + 1} \geq \frac{1}{u_n + 1}$$

car la fonction $x \mapsto \frac{1}{x}$ est décroissante sur $]0;+\infty[$

$$\Rightarrow 2 \geq \frac{4}{u_{n+1} + 1} \geq \frac{4}{u_n + 1}$$

$$\Rightarrow -2 \leq \frac{-4}{u_{n+1} + 1} \leq \frac{-4}{u_n + 1}$$

car j'ai multiplié par -1

$$\Rightarrow 1 \leq 3 - \frac{4}{u_{n+1} + 1} \leq 3 - \frac{4}{u_n + 1}$$

$$\Rightarrow 1 \leq u_{n+2} \leq u_{n+1}$$

donc $\mathcal{P}(n+1)$ est donc vraie.

J'en déduis que **$\mathcal{P}(n)$ est vraie pour tout entier naturel n**

donc $\forall n \in \mathbb{N},\ 1 \leq u_{n+1} \leq u_n$
</td></tr>
<tr><td>b)</td><td>La suite (u_n) est donc décroissante et minorée par 1.
J'en déduis qu'elle est convergente.</td></tr>
</table>

Correction de l'exercice 3.

La suite (u_n) est définie par $u_0 = -3$ et $u_{n+1} = \frac{9}{6-u_n}$ pour tout $n \in \mathbb{N}$.

a) Démontrer, par récurrence, que $-3 \leq u_n \leq u_{n+1} \leq 3$ pour tout $n \in \mathbb{N}$.

b) Que peut-on en déduire concernant la suite (u_n) ?

<table>
<tr>
<td rowspan="2">Exercice 3.</td>
<td>a)</td>
<td>

Pour n un entier fixé arbitrairement, notons $\mathcal{P}(n)$ la proposition

$$-3 \leq u_n \leq u_{n+1} \leq 3$$

Initialisation : pour $n = 0$

$$u_0 = -3$$

$$u_1 = \frac{9}{6-u_0} = \frac{9}{6-(-3)} = 1$$

$$\text{donc } -3 \leq u_0 \leq u_1 \leq 3$$

donc $\mathcal{P}(0)$ est donc vraie.

Hérédité : Je suppose que $\mathcal{P}(n)$ est vraie pour un entier naturel n fixé arbitrairement

Je suppose donc que $-3 \leq u_n \leq u_{n+1} \leq 3$

$$-3 \leq u_n \leq u_{n+1} \leq 3$$

$$\Longrightarrow 3 \geq -u_n \geq -u_{n+1} \geq -3$$

$$\Longrightarrow 9 \geq 6 - u_n \geq 6 - u_{n+1} \geq 3$$

$$\Longrightarrow \frac{1}{9} \leq \frac{1}{6-u_n} \leq \frac{1}{6-u_{n+1}} \leq \frac{1}{3}$$

car la fonction $x \mapsto \frac{1}{x}$ est décroissante sur $]0;+\infty[$

$$\Longrightarrow 1 \leq \frac{9}{6-u_n} \leq \frac{9}{6-u_{n+1}} \leq 3$$

$$\Longrightarrow -3 \leq u_{n+1} \leq u_{n+2} \leq 3$$

donc $\mathcal{P}(n+1)$ est donc vraie.

J'en déduis que **$\mathcal{P}(n)$ est vraie pour tout entier naturel n**

$$\text{donc } \forall n \in \mathbb{N}, \quad -3 \leq u_n \leq u_{n+1} \leq 3$$

</td>
</tr>
<tr>
<td>b)</td>
<td>

La suite (u_n) est donc croissante et majorée par 3.
J'en déduis qu'elle est convergente.

</td>
</tr>
</table>

Correction de l'exercice 4.

La suite (u_n) est définie par :

$$u_0 = 1 \text{ et } \forall n \in \mathbb{N},\ u_{n+1} = u_n + 2n + 3$$

a) Démontrer que la suite est monotone.
b) Démontrer par récurrence que, pour tout $n \in \mathbb{N}, u_n > n^2$.
c) En déduire la limite de la suite (u_n).
d) Conjecturez une expression explicite de u_n en fonction de n puis démontrez votre conjecture.

	a)	Soit $n \in \mathbb{N}, u_{n+1} - u_n = u_n + 2n + 3 - u_n = 2n + 3$ or $n \geq 0$ donc $2n + 3 \geq 0$ d'où $u_{n+1} - u_n \geq 0$ La suite (u_n) est donc croissante.
Exercice 4.	b)	Pour n un entier fixé arbitrairement, notons $\mathcal{P}(n)$ la proposition $u_n > n^2$ **Initialisation : pour $n = 0$** $u_0 = 1$ donc $u_0 > 0^2$ donc $\mathcal{P}(0)$ est donc vraie. **Hérédité : Je suppose que $\mathcal{P}(n)$ est vraie pour un entier naturel n fixé arbitrairement** **Je suppose donc que $u_n > n^2$** $u_n > n^2$ $\Rightarrow u_n + 2n + 3 > n^2 + 2n + 3$ $\Rightarrow u_{n+1} > n^2 + 2n + 3$ or $\underbrace{n^2 + 2n + 3}_{\text{ce que j'ai}} - \underbrace{(n+1)^2}_{\text{ce que je veux}} = n^2 + 2n + 3 - (n^2 + 2n + 1) = 2 > 0$ $\Rightarrow u_{n+1} > n^2 + 2n + 3 > (n+1)^2$ donc $\mathcal{P}(n+1)$ est donc vraie. J'en déduis que **$\mathcal{P}(n)$ est vraie pour tout entier naturel n** donc $\forall n \in \mathbb{N},\ u_n > n^2$
	c)	$\lim\limits_{n \to +\infty} n^2 = +\infty$ donc $\lim\limits_{n \to +\infty} u_n = +\infty$
	d)	`def u(n):` `    if n==0:` `        a=1` `    else:` — Le programme affiche : `0 | 1` `1 | 4` `2 | 9`

		`` a=u(n-1)+2*(n-1)+3 return a for n in range(11): print(n,'|',u(n)) ```	3 | 16 4 | 25 5 | 36 6 | 49 7 | 64 8 | 81 9 | 100 10 | 121

Je conjecture alors que, $\forall n \in \mathbb{N},\ \ u_n = (n+1)^2$

Démontrons le par récurrence

Initialisation : pour $\boldsymbol{n = 0}$

$$(0+1)^2 = 1 = u_0$$

donc $\mathcal{P}(0)$ est donc vraie.

Hérédité : Je suppose que $\boldsymbol{\mathcal{P}(n)}$ est vraie pour un entier naturel $\boldsymbol{n}$ fixé arbitrairement

Je suppose donc que $\boldsymbol{u_n = (n+1)^2}$

$$u_{n+1} = u_n + 2n + 3$$

$$\Longrightarrow u_{n+1} = (n+1)^2 + 2n + 3$$

$$\Longrightarrow u_{n+1} = n^2 + 2n + 1 + 2n + 3$$

$$\Longrightarrow u_{n+1} = n^2 + 4n + 4$$

$$\Longrightarrow u_{n+1} = (n+2)^2$$

donc $\mathcal{P}(n+1)$ est donc vraie.

J'en déduis que **$\boldsymbol{\mathcal{P}(n)}$ est vraie pour tout entier naturel $\boldsymbol{n}$**

donc $\forall n \in \mathbb{N},\ \ u_n = (n+1)^2$