

Exercice 1. (7 points)

Déterminer, en justifiant, la limite de la suite (u_n) dans les cas ci-dessous :

▶ 1. $\forall n \in \mathbb{N}, u_n = 5n - 3n^3 - 7$

▶ 2. $\forall n \in \mathbb{N}, u_n = -5\sqrt{n+1} - n^2$

▶ 3. $\forall n \in \mathbb{N}, u_n = \sqrt{n+2} - \sqrt{n}$

▶ 4. $\forall n \in \mathbb{N}, u_n = \frac{6n^2 - 1}{2n^2 + 5}$

Exercice 2. (4 points)

▶ 1. La suite (u_n) est définie pour tout $n \in \mathbb{N}$ par $u_n = 3 - 4n^2$.

Démontrer, **à l'aide de la définition**, la limite de la suite (u_n) .

▶ 2. La suite (v_n) est définie pour tout $n \in \mathbb{N}^*$ par $v_n = 1 - \frac{(-1)^n}{n^2}$.

Etudier la convergence de la suite (v_n) .

Exercice 3. (4 points)

On définit la suite (u_n) , pour tout $n \in \mathbb{N}$, par

$$u_{n+1} = \sqrt{u_n^2 + 2} \text{ et } u_0 = 1$$

▶ 1. On considère l'algorithme ci-contre. A quoi sert cet algorithme ?

▶ 2. Posons $\forall n \in \mathbb{N}, v_n = u_n^2$.

a) Démontrer que la suite (v_n) est arithmétique.

b) En déduire l'expression de v_n en fonction de n , pour tout $n \in \mathbb{N}$.

c) Déterminer alors l'expression de u_n en fonction de n , pour tout $n \in \mathbb{N}$. En déduire la limite de la suite (u_n) .

```

Demander la valeur de A
    N ← 0
    U ← 1
Tant que U < A
    U ← √(U² + 2)
    N ← N + 1
Fin
Afficher N
    
```

Exercice 4. (5 points)

On étudie la suite (u_n) définie, pour tout $n \in \mathbb{N}$, par

$$u_{n+1} = \frac{1}{3}u_n + 3 \text{ et } u_0 = 0$$

▶ 1. Calculer u_1, u_2 et u_3 .

▶ 2. On définit la suite (v_n) , pour tout $n \in \mathbb{N}$, par $v_n = u_n - \frac{9}{2}$.

a) Démontrer que la suite (v_n) est géométrique, on précisera ses éléments caractéristiques (raison et premier terme).

b) En déduire, pour tout $n \in \mathbb{N}$, l'expression de v_n en fonction de n puis celle de u_n .

c) Déterminer alors la limite de la suite (u_n) .

▶ 3. Déterminer $\lim_{n \rightarrow +\infty} \sum_{k=0}^n u_k$.

Pour cette question, toute trace de recherche, même incomplète, sera prise en compte dans l'évaluation.