Exercice 1.

1.

① J'identifie la FI :

$$\left.\begin{array}{r}\lim\limits_{n\to+\infty} 5n = +\infty \\ \lim\limits_{n\to+\infty} -3n^3 - 7 = -\infty\end{array}\right\}\text{alors par addition, la forme est indéterminée}$$

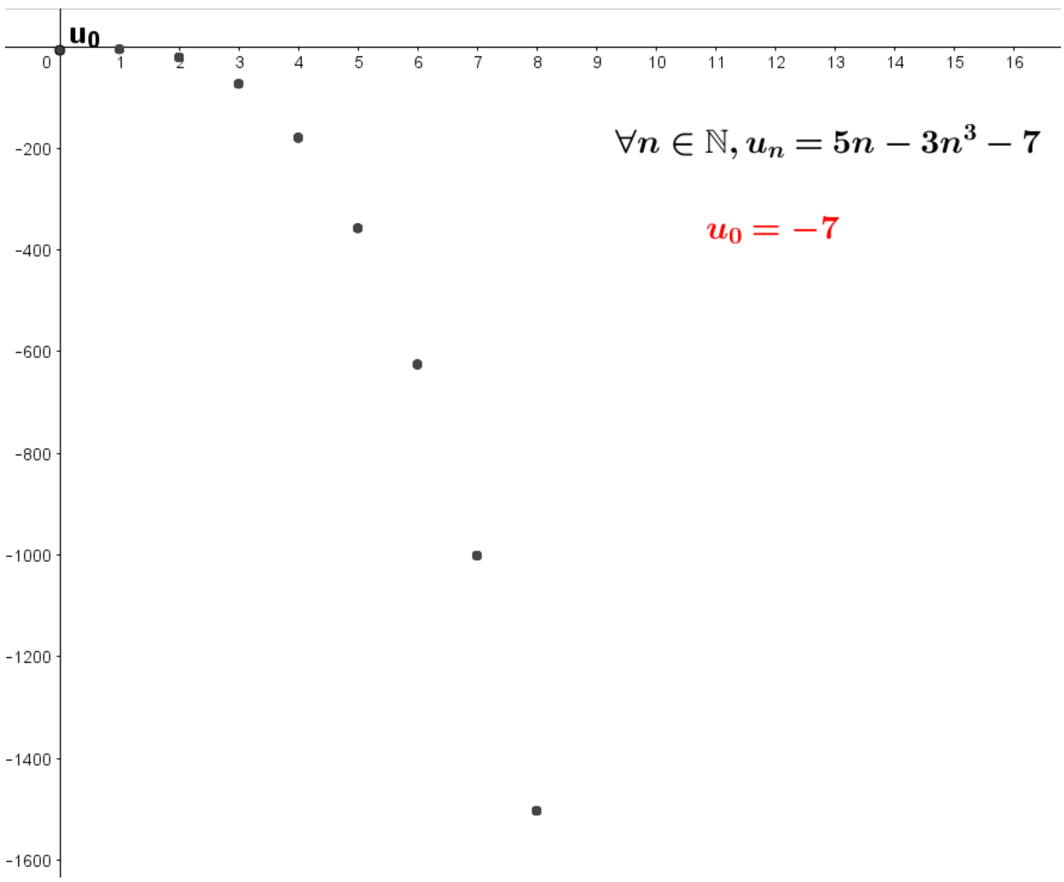
② Je transforme l'expression de la suite pour lever la FI :

$$\forall n \in \mathbb{N}^*,\ u_n = 5n - 3n^3 - 7$$

$$= n^3\left(\frac{5}{n^2} - 3 - \frac{7}{n^3}\right)$$

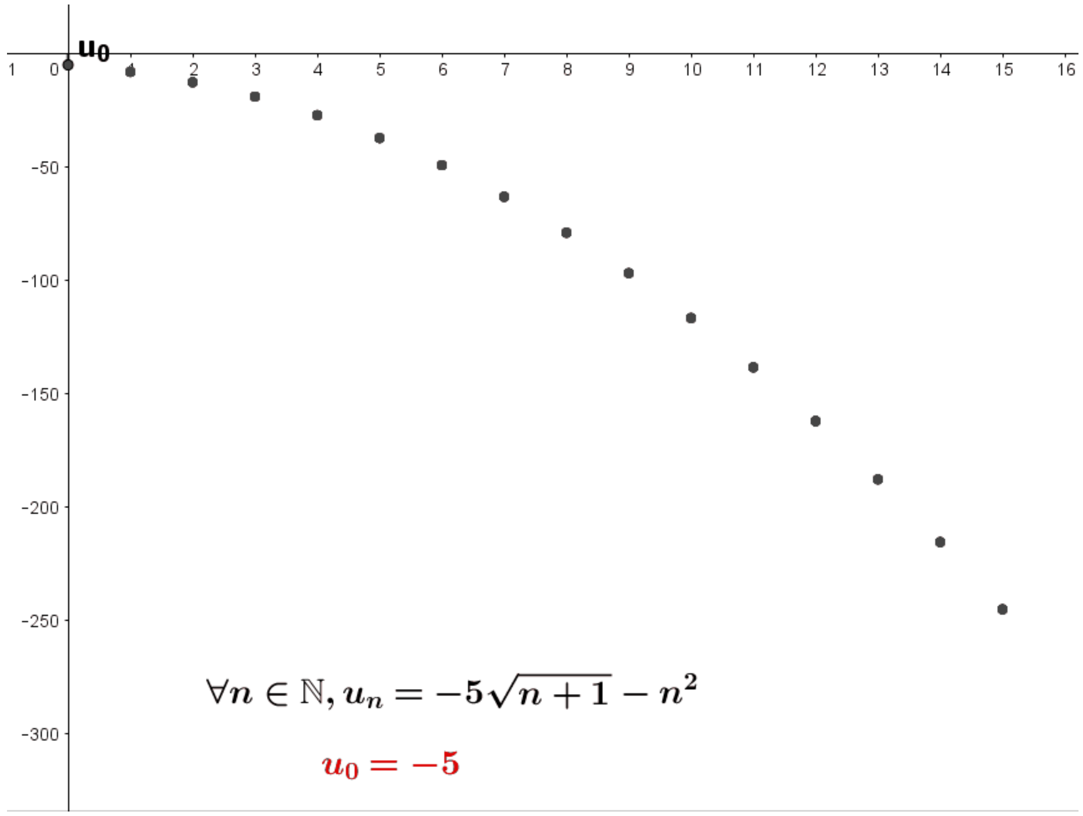
③ Je conclus :

$$\left.\begin{array}{r}\lim\limits_{n\to+\infty} n^3 = +\infty \\ \lim\limits_{n\to+\infty} \dfrac{5}{n^2} - 3 - \dfrac{7}{n^3} = -3\end{array}\right\}\text{alors par produit } \lim\limits_{n\to+\infty} u_n = -\infty$$



2.

$$\left.\begin{array}{r}\lim\limits_{n\to+\infty} -5\sqrt{n+1} = -\infty \\ \lim\limits_{n\to+\infty} -n^2 = -\infty\end{array}\right\}\text{alors par addition, } \lim_{n\to+\infty} u_n = -\infty$$



3.

① J'identifie la FI :

$$\left.\begin{array}{r}\lim\limits_{n\to+\infty} \sqrt{n+2} = +\infty \\ \lim\limits_{n\to+\infty} \sqrt{n} = +\infty\end{array}\right\}\text{alors par soustraction, la forme est indéterminée}$$

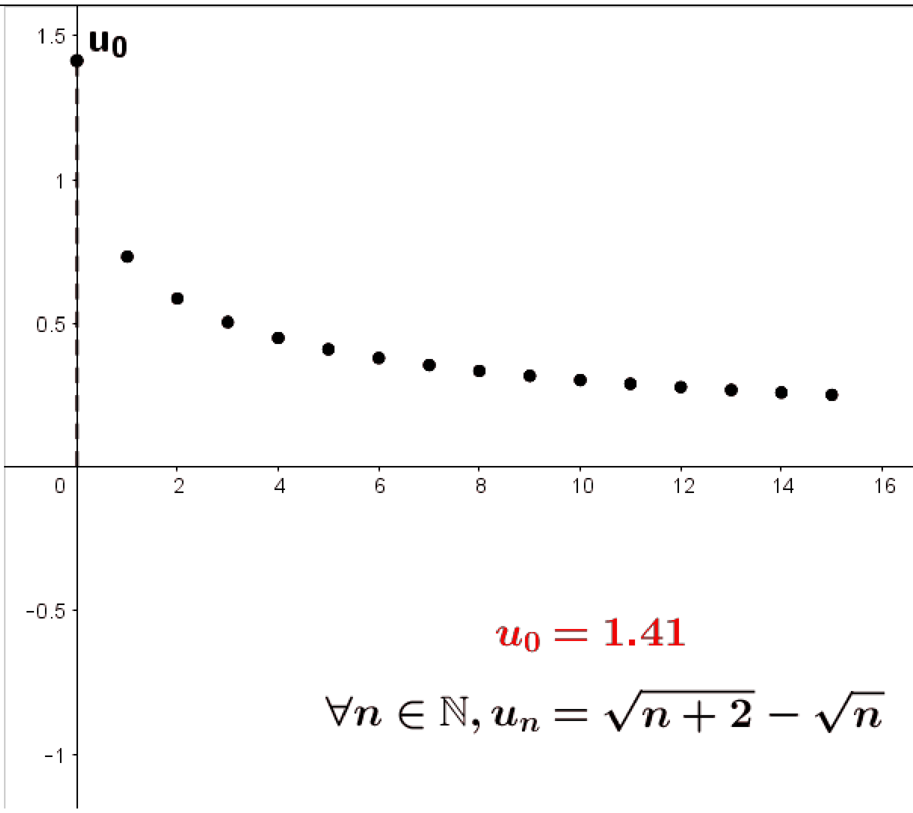
② Je transforme l'expression de la suite pour lever la FI :

$$\forall n \in \mathbb{N},\ \ u_n = \sqrt{n+2} - \sqrt{n} = \frac{\left(\sqrt{n+2} - \sqrt{n}\right)\left(\sqrt{n+2} + \sqrt{n}\right)}{\sqrt{n+2} + \sqrt{n}}$$

$$u_n = \frac{n+2-n}{\sqrt{n+2} + \sqrt{n}} = \frac{2}{\sqrt{n+2} + \sqrt{n}}$$

③ Je conclus :

$$\lim_{n\to+\infty} \sqrt{n+2} + \sqrt{n} = +\infty \ \ \text{alors} \ \lim_{n\to+\infty} u_n = 0$$

		u_0 1.5 1 0.5 0 -0.5 -1 2 4 6 8 10 12 14 16 $u_0 = 1.41$ $\forall n \in \mathbb{N}, u_n = \sqrt{n+2} - \sqrt{n}$

4.

① J'identifie la FI :

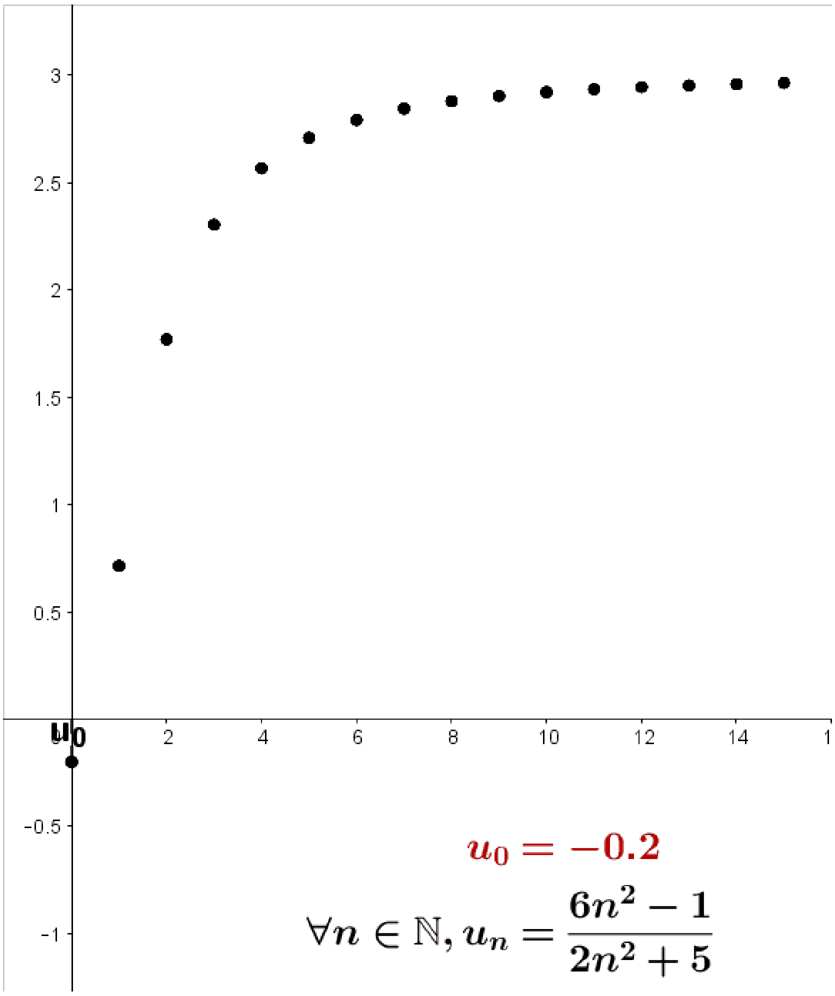
$$\left.\begin{aligned}\lim_{n\to+\infty} 6n^2-1 &= +\infty\\ \lim_{n\to+\infty} 2n^2+5 &= +\infty\end{aligned}\right\}\text{alors par quotient, la forme est indéterminée}$$

② Je transforme l'expression de la suite pour lever la FI :

$$\forall n\in\mathbb{N}^*,\ \ u_n=\frac{6n^2-1}{2n^2+5}=\frac{n^2\left(6-\frac{1}{n^2}\right)}{n^2\left(2+\frac{5}{n^2}\right)}=\frac{6-\frac{1}{n^2}}{2+\frac{5}{n^2}}$$

③ Je conclus :

$$\left.\begin{aligned}\lim_{n\to+\infty} 6-\frac{1}{n^2} &= 6\\ \lim_{n\to+\infty} 2+\frac{5}{n^2} &= 2\end{aligned}\right\}\text{alors par produit } \lim_{n\to+\infty} u_n=\frac{6}{2}=3$$



Exercice 2.

1.

Soit $A < 0$, $\quad u_n = 3 - 4n^2 < A$

$$\Leftrightarrow -4n^2 < A - 3 < 0$$

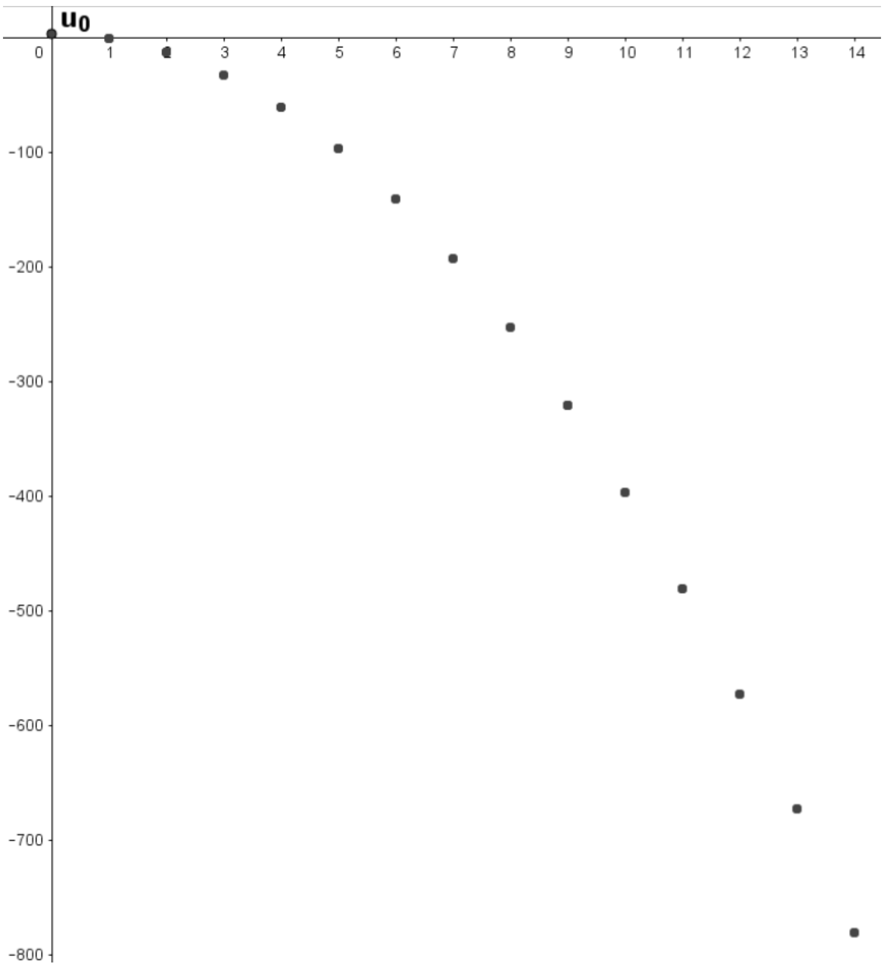
$$\Leftrightarrow n^2 > \frac{A-3}{-4} > 0$$

$$\Leftrightarrow n > \sqrt{\frac{3-A}{4}} \quad \text{ou} \quad \underbrace{n < -\sqrt{\frac{3-A}{4}}}_{exclu}$$

posons $N = \text{Ent}\left(\sqrt{\frac{3-A}{4}}\right) + 1,$

$\forall\, n \in \mathbb{N}, \qquad n > N \quad \text{donc} \quad u_n < A$

On en déduit que $\lim\limits_{n \to +\infty} u_n = -\infty$



	2.	Pour tout $n \in \mathbb{N}$, $\quad -1 \leq (-1)^n \leq 1$ donc, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, $\dfrac{-1}{n^2} \leq \dfrac{(-1)^n}{n^2} \leq \dfrac{1}{n^2}$ $\Leftrightarrow \dfrac{1}{n^2} \geq -\dfrac{(-1)^n}{n^2} \geq -\dfrac{1}{n^2}$ $\Leftrightarrow 1+\dfrac{1}{n^2} \geq 1-\dfrac{(-1)^n}{n^2} \geq 1-\dfrac{1}{n^2}$ $\Leftrightarrow 1+\dfrac{1}{n^2} \geq v_n \geq 1-\dfrac{1}{n^2}$ or $\lim\limits_{n\to+\infty} 1+\dfrac{1}{n^2} = \lim\limits_{n\to+\infty} 1-\dfrac{1}{n^2} = 1$ donc, d'après le théorème des gendarmes, $\lim\limits_{n\to+\infty} v_n = 1$
Exercice 3.	**1.**	L'algorithme permet d'afficher le premier rang pour lequel la suite (u_n) dépasse le seuil choisi A.
	2.	$\forall n \in \mathbb{N}, v_n = u_n^2$. $\forall n \in \mathbb{N}, v_{n+1} - v_n = u_{n+1}^2 - u_n^2$ $= \left(\sqrt{u_n^2+2}\right)^2 - u_n^2$ $= u_n^2 + 2 - u_n^2$ $v_{n+1} - v_n = 2$ On en déduit que la suite (v_n) est arithmétique de raison 2 et $v_0 = u_0^2 = 1^2 = 1$.
		On en déduit que, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $v_n = \boldsymbol{v_0 + n \times r} = 1 + 2n$.
		On a alors, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $u_n^2 = v_n = 1 + 2n$ donc $u_n = \sqrt{1+2n}$. D'où $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n = \lim\limits_{n\to+\infty} \sqrt{1+2n} = +\infty$

Exercice 4.		
	1.	$u_{0+1} = \frac{1}{3}u_0 + 3$ donc $u_1 = \frac{1}{3} \times 0 + 3 = 3$ $u_{1+1} = \frac{1}{3}u_1 + 3$ donc $u_2 = \frac{1}{3} \times 3 + 3 = 4$ $u_{2+1} = \frac{1}{3}u_2 + 3$ donc $u_3 = \frac{1}{3} \times 4 + 3 = \frac{13}{3}$
	2.	$\forall n \in \mathbb{N}, v_{n+1} = u_n - \frac{9}{2}$ $v_{n+1} = \frac{1}{3}u_n + 3 - \frac{9}{2}$ $v_{n+1} = \frac{1}{3}u_n - \frac{3}{2}$ $v_{n+1} = \frac{1}{3}\left(u_n - \frac{9}{2}\right) = \frac{1}{3}v_n$ (v_n) est donc géométrique de raison $\frac{1}{3}$ et de 1er terme $v_0 = -\frac{9}{2}$
	3.	$\forall n \in \mathbb{N}, \quad v_n = v_0 \times q^n = -\frac{9}{2} \times \left(\frac{1}{3}\right)^n = u_n - \frac{9}{2}$ et donc $\forall n \in \mathbb{N}, \quad u_n = \frac{9}{2} - \frac{9}{2} \times \left(\frac{1}{3}\right)^n$
		$\lim\limits_{n \to +\infty} \left(\frac{1}{3}\right)^n = 0$ car $0 < \frac{1}{3} < 1$, donc $\lim\limits_{n \to +\infty} u_n = \frac{9}{2}$
		$\sum\limits_{k=0}^{n} u_k = u_0 + u_1 + \cdots + u_{n-1} + u_n = v_0 + \frac{9}{2} + v_1 + \frac{9}{2} + \cdots + v_n + \frac{9}{2}$ $= v_0 \times \frac{1 - \left(\frac{1}{3}\right)^{n+1}}{1 - \frac{1}{3}} + (n+1) \times \frac{9}{2}$ $= \frac{3}{2} \times \left(-\frac{9}{2}\right)\left[1 - \left(\frac{1}{3}\right)^{n+1}\right] + (n+1) \times \frac{9}{2}$ $\lim\limits_{n \to +\infty} \left(\frac{1}{3}\right)^{n+1} = 0$ donc $\lim\limits_{n \to +\infty} \sum\limits_{k=0}^{n} u_k = +\infty$