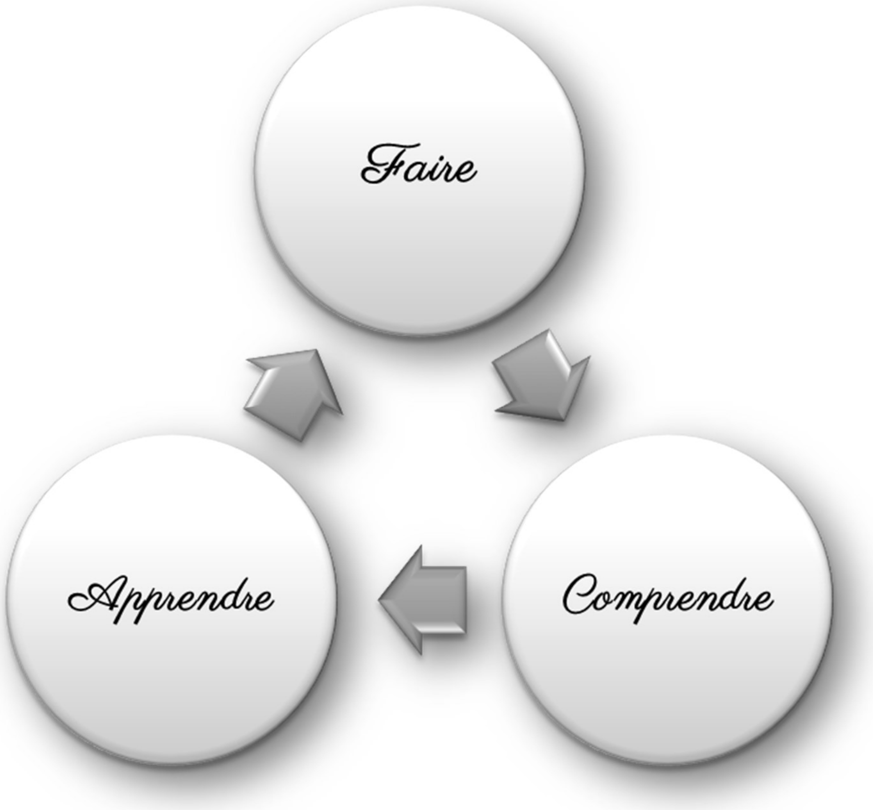
# Contrôle n°2
## Spécialité Mathématiques




## Table des matières

# Terminale Contrôle n°2

**Spécialité Mathématiques**

**Enoncé du sujet**

## Exercice 1. (5 points)

En 2010, une entreprise comptait 4000 employés. D'une année sur l'autre, 10% de l'effectif est parti à la retraite, et, pour compenser cette perte, l'entreprise a embauché 180 jeunes chaque année. Pour tout entier $n$, on appelle $u_n$ le nombre d'employés l'année $2010 + n$.

▶ 1. Donner $u_0$, puis justifier que, pour tout $n \in \mathbb{N}$,

$$u_{n+1} = 0,9u_n + 180.$$

▶ 2. Démontrer, par récurrence, que pour tout $n \in \mathbb{N}$ :

$$u_n = 1800 + 2200 \times 0{,}9^n.$$

▶ 3. En déduire la limite de la suite $(u_n)$.

▶ 4. On considère l'algorithme ci-contre.

a) Justifier que cet algorithme se termine.

b) Que contiendra la variable $n$ à la fin de l'exécution de l'algorithme ?

$n \leftarrow 0$
$u \leftarrow 4000$
Tant que $u \geq 2000$
    $u \leftarrow 0{,}9u + 180$
    $n \leftarrow n + 1$
Fin

## Exercice 2. (5 points)

On étudie la suite $(u_n)$ définie par : $\forall n \in \mathbb{N}$, $u_{n+1} = u_n + 2n - 1$ et $u_0 = 1$.

▶ 1. Démontrer que la suite $(u_n)$ est croissante à partir du rang 1.

▶ 2. Démontrer, par récurrence que, pour tout $n \in \mathbb{N}, n \geq 3$ : $u_n \geq n$.

▶ 3. En déduire la limite de la suite $(u_n)$.

▶ 4. Conjecturer puis démontrer une expression de $u_n$ en fonction de $n$.

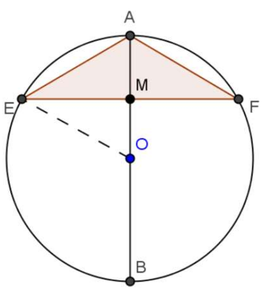
| $n$ | 0 | 1 | 2 | 3 | 4 | 5 | 6 | 7 | 8 |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| $u_n$ | 1 | 0 | 1 | 4 | 9 | 16 | 25 | 36 | 49 |

## Exercice 3. (5 points)

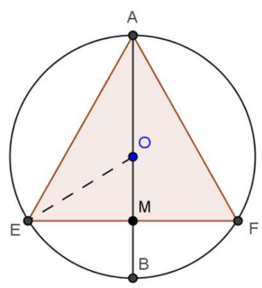
▶ 1. On étudie la fonction $f(x) = (3 - 2x)^4$ définie sur $\mathbb{R}$.
Dresser, en justifiant, le tableau de variations de la fonction $f$.

▶ 2. Soit $h$ la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par : $h(x) = \dfrac{1}{(x^2+1)^3}$ $\forall x \in \mathbb{R}$.
Dresser, en justifiant, le tableau de variations de la fonction $h$.

## Exercice 4. (5 points)




On considère le cercle de centre O et de diamètre $[AB]$ où $AB = 12$ cm. Le point $M$ est un point mobile sur le diamètre $[AB]$ et on pose $AM = x$ où $x \in [0; 12]$. La perpendiculaire au segment $[AB]$ passant par $M$ coupe le cercle en deux point $E$ et $F$. Pour tout $x \in [0; 12]$, notons $f(x)$ l'aire du triangle $AEF$.




▶ 1. Démontrer que $f(x) = x\sqrt{12x - x^2}$ cm², pour tout $x \in [0; 12]$.

▶ 2. Existe-t-il une position de $M$ qui donne une aire maximale ? Si oui, combien vaut cette aire maximale et quelle est la nature du triangle dans ce cas là ?

# Terminale Contrôle n°2

**Spécialité Mathématiques**

## Correction du sujet

### Correction de l'exercice 1. (5 points)

En 2010, une entreprise comptait 4000 employés. D'une année sur l'autre, 10% de l'effectif est parti à la retraite, et, pour compenser cette perte, l'entreprise a embauché 180 jeunes chaque année. Pour tout entier $n$, on appelle $u_n$ le nombre d'employés l'année $2010 + n$.

▶ 1. Donner $u_0$, puis justifier que, pour tout $n \in \mathbb{N}$,

$$u_{n+1} = 0,9u_n + 180.$$

▶ 2. Démontrer, par récurrence, que pour tout $n \in \mathbb{N}$ :

$$u_n = 1800 + 2200 \times 0{,}9^n.$$

▶ 3. En déduire la limite de la suite $(u_n)$.

▶ 4. On considère l'algorithme ci-contre.

a) Justifier que cet algorithme se termine.

b) Que contiendra la variable $n$ à la fin de l'exécution de l'algorithme ?

```
n ← 0
u ← 4000
Tant que u ≥ 2000
    u ← 0,9u + 180
    n ← n + 1
Fin
```

| | | |
|---|---|---|
| **Exercice 1.** | **1.** | $u_0 = 4000$<br>$u_n$ le nombre d'employés l'année $2010 + n$, l'année d'après 10% de l'effectif est parti à la retraite, il reste donc 90% des employés soit $0{,}9u_n$ et pour compenser, l'entreprise embauche 180 personnes.<br>Le nombre d'employés l'année $2010 + (n + 1)$ est donc<br>$u_{n+1} = 0,9u_n + 180$ |

<table>
<tr><td rowspan="3"></td><td>2.</td><td>Démontrons par récurrence que $\mathcal{P}(n) : u_n = 1800 + 2200 \times 0{,}9^n$ est vraie pour tout $n \in \mathbb{N}$.<br><br>Initialisation pour $n = 0$ :<br>$$u_0 = 4000$$<br>or $1800 + 2200 \times 0{,}9^0 = 1800 + 2200 = 4000$<br>donc $u_0 = 1800 + 2200 \times 0{,}9^0$<br>donc $\mathcal{P}(0)$ est vraie.<br><br>Hérédité : On suppose que $\mathcal{P}(n)$ : $u_n = 1800 + 2200 \times 0{,}9^n$ est vraie pour $n \in \mathbb{N}$ fixé<br>$$u_{n+1} = 0,9u_n + 180$$<br>Je substitue $u_n$ par $1800 + 2200 \times 0{,}9^n$<br>$$u_{n+1} = 0,9(1800 + 2200 \times 0{,}9^n) + 180$$<br>Je distribue 0,9<br>$$u_{n+1} = 0,9 \times 1800 + 0,9 \times 2200 \times 0{,}9^n + 180$$<br>$$u_{n+1} = 1620 + 2200 \times 0{,}9^{n+1} + 180$$<br>$$u_{n+1} = 1800 + 2200 \times 0{,}9^{n+1}$$<br><br>donc $\mathcal{P}(n+1)$ est vraie<br><br>Par conséquent : $\mathcal{P}(n)$ est vraie pour tout $n \in \mathbb{N}$<br>donc $\forall n \in \mathbb{N}$, $u_n = 1800 + 2200 \times 0{,}9^n$</td></tr>
<tr><td>3.</td><td>$$\lim_{n \to +\infty} 0{,}9^n = 0 \text{ car } |0{,}9| < 1$$<br>$$\text{donc } \lim_{n \to +\infty} u_n = 1800$$</td></tr>
<tr><td>4a.</td><td>L'algorithme se terminera si la condition de la boucle « Tant que » devient fausse.<br>Mais, puisque la suite $(u_n)$ tend vers 1800, au bout d'un certain rang, les termes de la suite seront aussi proche que l'on veut de 1800 et donc forcément inférieurs à 2000.<br><br>La boucle « Tant que » va donc forcément se terminer.</td></tr>
</table>

| | | | |
|---|---|---|---|
| | **4b.** | ```<br>n=0<br>u=4000<br>while u>=2000:<br>    u=0.9*u+180<br>    n=n+1<br>    print(u,'\|',n)<br>``` | 3780.0 \| 1<br>3582.0 \| 2<br>3403.8 \| 3<br>3243.42 \| 4<br>3099.078 \| 5<br>2969.1702 \| 6<br>2852.25318 \| 7<br>2747.0278620000004 \| 8<br>2652.3250758000004 \| 9<br>2567.0925682200004 \| 10<br>2490.3833113980004 \| 11<br>2421.3449802582004 \| 12<br>2359.2104822323804 \| 13<br>2303.2894340091425 \| 14<br>2252.960490608228 \| 15<br>2207.6644415474057 \| 16<br>2166.8979973926653 \| 17<br>2130.208197653399 \| 18<br>2097.187377888059 \| 19<br>2067.468640099253 \| 20<br>2040.721776089328 \| 21<br>2016.649598480395 \| 22<br>1994.9846386323557 \| 23 |

## Correction de l'exercice 2. (5 points)

On étudie la suite $(u_n)$ définie par : $\forall n \in \mathbb{N}$, $u_{n+1} = u_n + 2n - 1$ et $u_0 = 1$.

▶ 1. Démontrer que la suite $(u_n)$ est croissante à partir du rang 1.

▶ 2. Démontrer, par récurrence que, pour tout $n \in \mathbb{N}, n \geq 3 : u_n \geq n$.

▶ 3. En déduire la limite de la suite $(u_n)$.

▶ 4. Conjecturer puis démontrer une expression de $u_n$ en fonction de $n$.

| $\boldsymbol{n}$ | 0 | 1 | 2 | 3 | 4 | 5 | 6 | 7 | 8 |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| $\boldsymbol{u_n}$ | 1 | 0 | 1 | 4 | 9 | 16 | 25 | 36 | 49 |

| | | |
|---|---|---|
| **Exercice 2.** | **1.** | Soit $n \in \mathbb{N}^*$,<br>$u_{n+1} - u_n = u_n + 2n - 1 - u_n = 2n - 1$<br>or $n \geq 1 \Leftrightarrow 2n \geq 2 \Leftrightarrow 2n - 1 \geq 1$<br>donc $u_{n+1} - u_n = 2n - 1 \geq 1 > 0$<br>La suite $(u_n)$ est donc croissante, à partir du rang 1. |

**2.**

Démontrons par récurrence que $\mathcal{P}(n)$ : $u_n \geq n$ est vraie pour tout $n \in \mathbb{N}, n \geq 3$.

**Initialisation** pour $n = 3$ :

$$u_0 = 1$$
$$u_1 = u_0 + 2 \times 0 - 1 = 1 - 1 = 0$$
$$u_2 = u_1 + 2 - 1 = 0 + 1 = 1$$
$$u_3 = u_2 + 2 \times 2 - 1 = 1 + 2 \times 2 - 1 = 4$$
$$\text{or} \quad 4 \geq 3$$
$$\text{donc} \quad u_3 = 4 \geq 3$$

**donc $\mathcal{P}(3)$ est vraie.**

**Hérédité : On suppose que $\mathcal{P}(n)$** : $u_n \geq n$ est vraie pour $n \in \mathbb{N}, n \geq 3$ fixé

$$u_n \geq n$$

J'ajoute $2n - 1$ de chaque côté

$$\Leftrightarrow u_n + 2n - 1 \geq n + 2n - 1$$
$$\Leftrightarrow u_{n+1} \geq 3n - 1$$

$$\text{or} \qquad \underbrace{(3n-1)-(n+1)}_{\substack{\text{Je cherche le signe de ce que} \\ \text{j'ai obtenu moins ce que je veux avoir}}} \qquad = 3n - 1 - n - 1 = 2n - 2$$

et puisque $n \geq 3$

$$2n \geq 6 \Leftrightarrow 2n - 3 \geq 3 > 0$$

d'où $3n - 1 > n + 1$

et donc $u_{n+1} \geq 3n - 1 > n + 1$

**donc $\mathcal{P}(n+1)$ est vraie**

Par conséquent : $\mathcal{P}(n)$ est vraie pour tout $n \in \mathbb{N}$

donc $\forall n \in \mathbb{N}, n \geq 3 \quad u_n \geq n$

**3.**

$$\lim_{n \to +\infty} n = +\infty$$

Donc, par comparaison,

$$\lim_{n \to +\infty} u_n = +\infty$$

| | | |
|---|---|---|
| | **4.** | Je conjecture que, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $u_n = (n-1)^2$<br>Démontrons par récurrence que $\mathcal{P}(n)$ : $u_n = (n-1)^2$ est vraie pour tout $n \in \mathbb{N}$.<br><br>**Initialisation** pour $n = 0$ :<br>$(0-1)^2 = 1 = u_0$<br>**donc $\mathcal{P}(0)$ est vraie.**<br><br>**Hérédité : On suppose que $\mathcal{P}(n)$** : $u_n = (n-1)^2$ est vraie pour $n \in \mathbb{N}$ fixé<br>$u_{n+1} = u_n + 2n - 1$<br>$u_{n+1} = (n-1)^2 + 2n - 1$<br>$u_{n+1} = n^2 - 2n + 1 + 2n - 1$<br>$u_{n+1} = n^2$<br><br>**donc $\mathcal{P}(n+1)$ est vraie**<br><br>Par conséquent : $\mathcal{P}(n)$ est vraie pour tout $n \in \mathbb{N}$<br>donc $\forall n \in \mathbb{N} \quad u_n = (n-1)^2$ |

## Correction de l'exercice 3. (5 points)

▶ 1. On étudie la fonction $f(x) = (3-2x)^4$ définie sur $\mathbb{R}$.
Dresser, en justifiant, le tableau de variations de la fonction $f$.

▶ 2. Soit $h$ la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par : $h(x) = \dfrac{1}{(x^2+1)^3}$ $\forall x \in \mathbb{R}$.
Dresser, en justifiant, le tableau de variations de la fonction $h$.

**Exercice 3.**

**1.**

$f$ est dérivable sur $\mathbb{R}$.

$\forall x \in \mathbb{R}, f(x) = (3-2x)^4 = \boldsymbol{u^4}$

$$\boldsymbol{u = 3 - 2x \quad u' = -2}$$

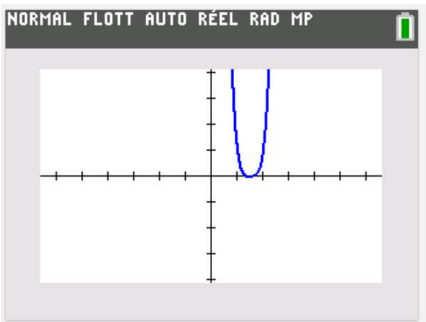
$\forall x \in \mathbb{R}, f'(x) = \boldsymbol{4u^3 \times u'}$

$\forall x \in \mathbb{R}, f'(x) = 4 \times (3-2x)^3 \times (-2) = -8(3-2x)^3$

$$\begin{aligned} f'(x) > 0 &\Leftrightarrow -8(3-2x)^3 > 0 \\ &\Leftrightarrow (3-2x)^3 < 0 \\ &\Leftrightarrow 3 - 2x < 0 \\ &\Leftrightarrow -2x < -3 \\ &\Leftrightarrow x > \frac{3}{2} \end{aligned}$$

| $x$ | $-\infty$ | | $\frac{3}{2}$ | | $+\infty$ |
|---|---|---|---|---|---|
| $f'(x)$ | | $-$ | $0$ | $+$ | |
| $f(x)$ | $+\infty$ | $\searrow$ | $0$ | $\nearrow$ | $+\infty$ |

$$f\left(\frac{3}{2}\right) = \left(3 - 2 \times \frac{3}{2}\right)^4 = 0$$



**2.**

$h$ est dérivable sur $\mathbb{R}$

**Méthode n°1 :**

$$\forall x \in \mathbb{R},\quad h(x) = \frac{1}{(x^2+1)^3} = \frac{u}{v}$$

$$u = 1 \qquad u' = 0$$

$$v = (x^2+1)^3 \qquad v' = 3 \times (x^2+1)^2 \times 2x = 6x(x^2+1)^2$$

$$\forall x \in \mathbb{R},\quad h'(x) = \frac{u'v - uv'}{v^2} = \frac{0 - 1 \times 6x(x^2+1)^2}{(x^2+1)^6} = \frac{-6x}{(x^2+1)^4}$$

**Méthode n°2 :**

$$\forall x \in \mathbb{R},\quad h(x) = \frac{1}{(x^2+1)^3} = (x^2+1)^{-3} = u^{-3}$$

$$u = x^2 + 1 \quad u' = 2x$$

$$\forall x \in \mathbb{R},\quad h'(x) = -3u^{-4} \times u' = -3(x^2+1)^{-4} \times 2x$$

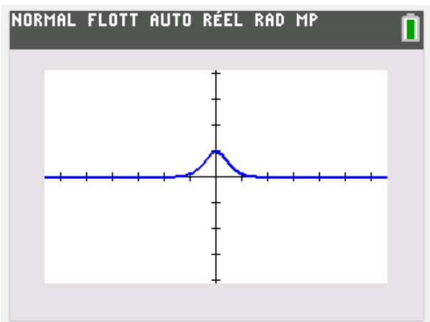
$$h'(x) = \frac{-6x}{(x^2+1)^4}$$

$$h'(x) > 0 \Leftrightarrow \frac{-6x}{(x^2+1)^4} > 0$$

$$\Leftrightarrow -6x > 0 \ \text{ car } (x^2+1)^4 > 0$$

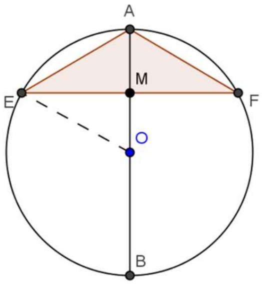
$$\Leftrightarrow x < 0$$

| $x$ | $-\infty$ | | $0$ | | $+\infty$ |
|---|---|---|---|---|---|
| $h'(x)$ | | $+$ | $0$ | $-$ | |
| $h(x)$ | $0$ | $\nearrow$ | $1$ | $\searrow$ | $0$ |

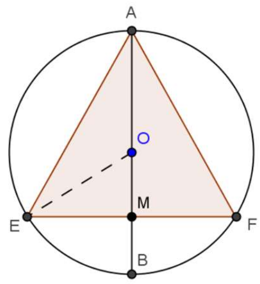



## Correction de l'exercice 4. (5 points)

On considère le cercle de centre O et de diamètre $[AB]$ où $AB = 12$ cm. Le point $M$ est




un point mobile sur le diamètre $[AB]$ et on pose $AM = x$ où $x \in [0; 12]$. La perpendiculaire au segment $[AB]$ passant par $M$ coupe le cercle en deux point $E$ et $F$. Pour tout $x \in [0; 12]$, notons $f(x)$ l'aire du triangle $AEF$.

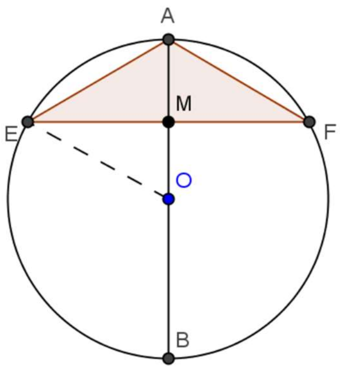



▶1. Démontrer que $f(x) = x\sqrt{12x - x^2}$ cm², pour tout $x \in [0; 12]$.

▶2. Existe-t-il une position de $M$ qui donne une aire maximale ? Si oui, combien vaut cette aire maximale et quelle est la nature du triangle dans ce cas là ?

<table>
<tr>
<td>Exercice 4.</td>
<td>1.</td>
<td>

Le triangle $AEF$ a pour base $EF$ et pour hauteur $AM = x$. Son aire est donc égale à



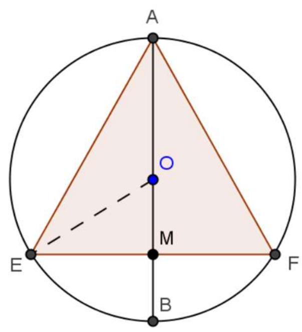

$$f(x) = \frac{EF \times AM}{2} = \frac{2 \times EM \times x}{2}$$

Lorsque $0 \leq x \leq 6$,
D'après Pythagore,

$$\begin{aligned} EM^2 = OE^2 - OM^2 &= 6^2 - (6-x)^2 \\ &= 36 - (36 - 12x + x^2) \\ &= 36 - 36 + 12x - x^2 = 12x - x^2 \end{aligned}$$

Lorsque $6 \leq x \leq 12$,
D'après Pythagore,

$$\begin{aligned} EM^2 = OE^2 - OM^2 &= 6^2 - (x-6)^2 \\ &= 36 - (x^2 - 12x + 36) \\ &= 36 - x^2 + 12x - 36 = 12x - x^2 \end{aligned}$$




Par conséquent, pour tout $x \in [0; 12]$

$$f(x) = \frac{2 \times \sqrt{12x - x^2} \times x}{2} = x\sqrt{12x - x^2}$$

</td>
</tr>
</table>

**2.**

Pour tout $x \in [0;12]$

$$u = x \qquad u' = 1$$

$$v = \sqrt{12x - x^2} \qquad v' = \frac{12 - 2x}{2\sqrt{12x - x^2}} = \frac{6 - x}{\sqrt{12x - x^2}}$$

$$f'(x) = 1 \times \sqrt{12x - x^2} + x \times \frac{6 - x}{\sqrt{12x - x^2}}$$

$$f'(x) = \frac{12x - x^2}{\sqrt{12x - x^2}} + \frac{6x - x^2}{\sqrt{12x - x^2}}$$

$$f'(x) = \frac{18x - 2x^2}{\sqrt{12x - x^2}} = \frac{2x(9 - x)}{\sqrt{12x - x^2}}$$

$f'(x) > 0 \Leftrightarrow 2x(9 - x) > 0$ car $\sqrt{12x - x^2} > 0$

La parabole $2x(9 - x)$ étant tournée vers le bas :

| $x$ | $-\infty$ | | $0$ | | $9$ | | $+\infty$ |
|---|---|---|---|---|---|---|---|
| $2x(9-x)$ | | $-$ | $0$ | $+$ | $0$ | $-$ | |

On en déduit le tableau de variations de $f$ :

| $x$ | $0$ | | $9$ | | $12$ |
|---|---|---|---|---|---|
| $f'(x)$ | | $+$ | $0$ | $-$ | |
| $f(x)$ | $0$ | $\nearrow$ | $27\sqrt{3}$ | $\searrow$ | $0$ |

L'aire sera alors maximale pour $x = AM = 9$ cm.

L'aire maximale sera alors égale à :

$$f(9) = 9\sqrt{27} = 9\sqrt{9 \times 3} = 9 \times 3\sqrt{3} = 27\sqrt{3} \text{ cm}^2$$

Dans ce cas là $EM = \sqrt{12 \times 9 - 9^2} = \sqrt{27} = 3\sqrt{3}$

et donc $EF = 2 \times EM = 6\sqrt{3}$

D'après Pythagore, $AE^2 = 9^2 + \left(3\sqrt{3}\right)^2 = 81 + 9 \times 3 = 108$

Donc $AE = AF = \sqrt{108} = 6\sqrt{3} = EF$

Le triangle $AEF$ est donc équilatéral.