EXERCICE 1 (4 points) - *Commun à tous les candidats*

Cet exercice est un questionnaire à choix multiples. Aucune justification n'est demandée. Pour chacune des questions, une seule des propositions est correcte. Chaque réponse correcte rapporte un point. Une réponse erronée ou une absence de réponse n'ôte pas de point. On notera sur la copie le numéro de la question, suivi de la lettre correspondant à la proposition choisie.

L'espace est rapporté à un repère orthonormé $(O;\vec{\imath};\vec{\jmath};\vec{k})$. Les points A, B, C et D ont pour coordonnées respectives $A(1;-1;2)$, $B(3;3;8)$, $C(-3;5;4)$ et $D(1;2;3)$.

On note $\mathcal{D}$ la droite ayant pour représentation paramétrique $\begin{cases} x = t+1 \\ y = 2t-1, \quad t \in \mathbb{R} \\ z = 3t+2 \end{cases}$

et $\mathcal{D}$' la droite ayant pour représentation paramétrique $\begin{cases} x = k+1 \\ y = k+3\ , \quad k \in \mathbb{R}. \\ z = -k+4 \end{cases}$

On note $\mathcal{P}$ le plan d'équation $x+y-z+2=0$.

Question 1 :

Proposition a. Les droites $\mathcal{D}$ et $\mathcal{D}$' sont parallèles.

Proposition b. Les droites $\mathcal{D}$ et $\mathcal{D}$' sont coplanaires.

Proposition c. Le point C appartient à la droite $\mathcal{D}$.

Proposition d. Les droites $\mathcal{D}$ et $\mathcal{D}$' sont orthogonales.

Question 2 :

Proposition a. Le plan $\mathcal{P}$ contient la droite $\mathcal{D}$ et est parallèle à la droite $\mathcal{D}$'.

Proposition b. Le plan $\mathcal{P}$ contient la droite $\mathcal{D}$' et est parallèle à la droite $\mathcal{D}$.

Proposition c. Le plan $\mathcal{P}$ contient la droite $\mathcal{D}$ et est orthogonal à la droite $\mathcal{D}$'.

Proposition d. Le plan $\mathcal{P}$ contient les droites $\mathcal{D}$ et $\mathcal{D}$'.

Question 3 :

Proposition a. Les points A, D et C sont alignés.
Proposition b. Le triangle ABC est rectangle en A.
Proposition c. Le triangle ABC est équilatéral.
Proposition d. Le point D est le milieu du segment $[AB]$.

Question 4 :

On note $\mathcal{P}$' le plan contenant la droite $\mathcal{D}$' et le point A. Un vecteur normal à ce plan est:

Proposition a. $\vec{n}(-1;5;4)$
Proposition b. $\vec{n}(3;-1;2)$
Proposition c. $\vec{n}(1;2;3)$
Proposition d. $\vec{n}(1;1;-1)$

EXERCICE 2 (5 points) - *Commun à tous les candidats*

L'entreprise Fructidoux fabrique des compotes qu'elle conditionne en petits pots de 50 grammes. Elle souhaite leur attribuer la dénomination « compote allégée ». La législation impose alors que la teneur en sucre, c'est-à-dire la proportion de sucre dans la compote, soit comprise entre 0,16 et 0,18. On dit dans ce cas que le petit pot de compote est conforme. L'entreprise possède deux chaînes de fabrication F_1 et F_2.
Les parties A et B peuvent être traitées indépendamment

Partie A

La chaîne de production F_2 semble plus fiable que la chaîne de production F_1. Elle est cependant moins rapide. Ainsi, dans la production totale, 70% des petits pots proviennent de la chaîne F_1 et 30% de la chaîne F_2. La chaîne F_1 produit 5% de compotes non conformes et la chaîne F_2 en produit 1%.
On prélève au hasard un petit pot dans la production totale. On considère les évènements :
E : « Le petit pot provient de la chaîne F_2 » et C : « Le petit pot est conforme. »

▶1. Construire un arbre pondéré sur lequel on indiquera les données qui précèdent.

▶2. Calculer la probabilité de l'évènement : « Le petit pot est conforme et provient de la chaîne de production F_1. »

▶3. Déterminer la probabilité de l'évènement C.

▶4. Déterminer, à 10^{-3} près, la probabilité de l'évènement E sachant que l'évènement C est réalisé.

Partie B

▶1. On note X la variable aléatoire qui, à un petit pot pris au hasard dans la production de la chaîne F_1, associe sa teneur en sucre. On suppose que X suit la loi normale d'espérance $m_1 = 0{,}17$ et d'écart-type $\sigma_1 = 0{,}006$.
Dans la suite, on pourra utiliser le tableau ci-dessous.

α	β	$P(\alpha \leq X \leq \beta)$
0,13	0,15	0,000 4
0,14	0,16	0,047 8
0,15	0,17	0,499 6
0,16	0,18	0,904 4
0,17	0,19	0,499 6
0,18	0,20	0,047 8
0,19	0,21	0,000 4

Donner une valeur approchée à 10^{-4} près de la probabilité qu'un petit pot prélevé au hasard dans la production de la chaîne F_1 soit conforme.

▶2. On note Y la variable aléatoire qui, à un petit pot pris au hasard dans la production de la chaîne F_2, associe sa teneur en sucre. On suppose que Y suit la loi normale d'espérance $m_2 = 0{,}17$ et d'écart-type σ_2. On suppose de plus que la probabilité qu'un petit pot prélevé au hasard dans la production de la chaîne F_2 soit conforme est égale à 0,99.
Soit Z la variable aléatoire définie par $Z = \frac{Y - m_2}{\sigma_2}$.

a. Quelle loi la variable aléatoire Z suit-elle ?

b. Déterminer, en fonction de σ_2 l'intervalle auquel appartient Z lorsque Y appartient à l'intervalle [0,16 ; 0,18].
c. En déduire une valeur approchée à 10^{-3} près de σ_2. On pourra utiliser le tableau donné ci-dessous, dans lequel la variable aléatoire Z suit la loi normale d'espérance 0 et d'écart-type 1.

β	$P(-\beta \leq Z \leq \beta)$
2,423 4	0,985
2,457 3	0,986
2,483 8	0,987
2,512 1	0,988
2,542 7	0,989
2,575 8	0,990
2,612 1	0,991
2,652 1	0,992
2,696 8	0,993

EXERCICE 3 (6 points) - *Commun à tous les candidats*

Étant donné un nombre réel k, on considère f_k définie sur $\mathbb{R}$ par $f_k(x) = \frac{1}{1+e^{-kx}}$.
Le plan est muni d'un repère orthonormé $(O; \vec{\imath}; \vec{\jmath})$.

Partie A

Dans cette partie on choisit $k = 1$. On a donc, pour tout réel x, $f_1(x) = \frac{1}{1+e^{-x}}$. La représentation graphique c de la fonction f_1 dans le repère $(O; \vec{\imath}; \vec{\jmath})$ est donnée en ANNEXE, à rendre avec la copie.

▶1. Déterminer les limites de $f_1(x)$ en $+\infty$ et en $-\infty$ et interpréter graphiquement les résultats obtenus.

▶2. Démontrer que, pour tout réel x, $f_1(x) = \frac{e^x}{1+e^x}$.

▶3. On appelle f'_1 la fonction dérivée de f_1 sur $\mathbb{R}$. Calculer, pour tout réel x, $f'_1(x)$. En déduire les variations de la fonction f_1 sur $\mathbb{R}$.

▶4. On définit le nombre $I = \int_0^1 f_1(x)dx$. Montrer que $I = \ln\left(\frac{1+e}{2}\right)$. Donner une interprétation graphique de I.

Partie B

Dans cette partie, on choisit $k = -1$ et on souhaite tracer la courbe $\mathcal{C}_{-1}$ représentant la fonction f_{-1}. Pour tout réel x, on appelle P le point de $\mathcal{C}_1$ d'abscisse x et M le point de $\mathcal{C}_{-1}$ d'abscisse x. On note K le milieu du segment $[MP]$.

▶1. Montrer que, pour tout réel x, $f_1(x) + f_{-1}(x) = 1$.

▶2. En déduire que le point K appartient à la droite d'équation $y = \frac{1}{2}$.

▶3. Tracer la courbe $\mathcal{C}_{-1}$ sur l'ANNEXE, à rendre avec la copie.

▶4. En déduire l'aire, en unités d'aire, du domaine délimité par les courbes $\mathcal{C}_1$, $\mathcal{C}_{-1}$ l'axe des ordonnées et la droite d'équation $x = 1$.

Partie C

Dans cette partie, on ne privilégie pas de valeur particulière du paramètre k. Pour chacune des affirmations suivantes, dire si elle est vraie ou fausse et justifier la réponse.

▶1. Quelle que soit la valeur du nombre réel k, la représentation graphique de la fonction f_k est strictement comprise entre les droites d'équations $y = 0$ et $y = 1$.
▶2. Quelle que soit la valeur du réel k, la fonction f_k est strictement croissante.
▶3. Pour tout réel $k \geq 10$, $f_k\left(\frac{1}{2}\right) \geq 0{,}99$.

EXERCICE 4 (5 points) – *Candidats n'ayant pas suivi l'enseignement de spécialité*

On considère la suite (v_n) définie pour tout entier naturel n par $\begin{cases} v_0 = 1 \\ v_{n+1} = \frac{9}{6-v_n} \end{cases}$

Partie A

▶1. On souhaite écrire un algorithme affichant, pour un entier naturel n donné, tous les termes de la suite, du rang 0 au rang n. Parmi les trois algorithmes suivants, un seul convient. Préciser lequel en justifiant la réponse.

Algorithme n°1	**Algorithme n°2**	**Algorithme n°3**
Variables : v est un réel i et n sont des entiers naturels **Début de l'algorithme :** Lire n v prend la valeur 1 Pour i variant de 1 à n faire v prend la valeur $\frac{9}{6-v}$ Fin pour Afficher v **Fin algorithme**	**Variables :** v est un réel i et n sont des entiers naturels **Début de l'algorithme :** Lire n Pour i variant de 1 à n faire v prend la valeur 1 Afficher v v prend la valeur $\frac{9}{6-v}$ Fin pour **Fin algorithme**	**Variables :** v est un réel i et n sont des entiers naturels **Début de l'algorithme :** Lire n v prend la valeur 1 Pour i variant de 1 à n faire Afficher v v prend la valeur $\frac{9}{6-v}$ Fin pour Afficher v **Fin algorithme**

▶2. Pour $n = 10$ on obtient l'affichage suivant :

1	1,800	2,143	2,333	2,455	2,538	2,600	2,647	2,684	2,714	2,739

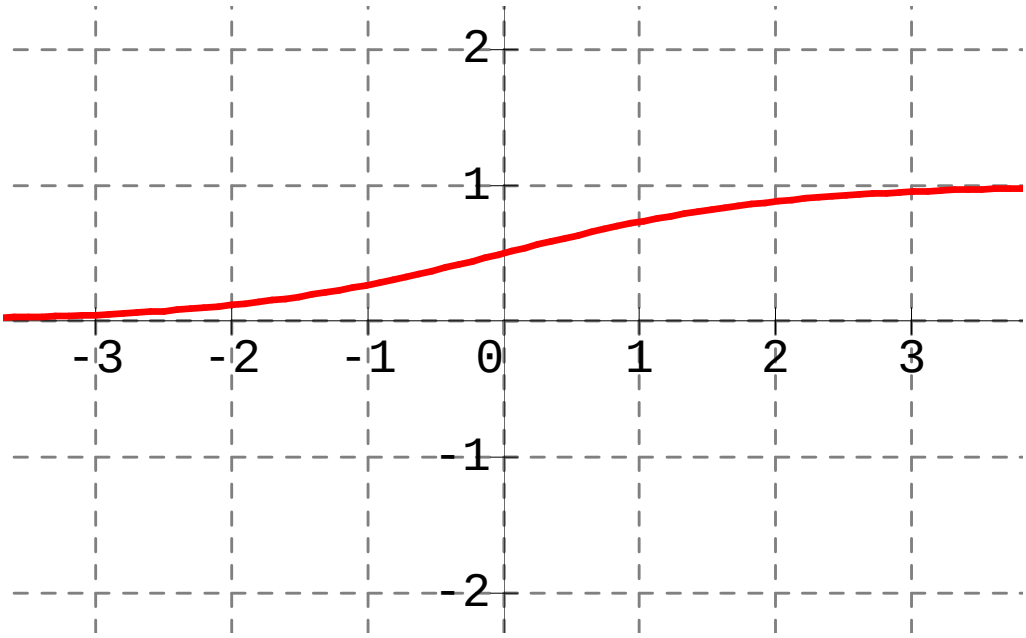
Pour $n = 100$, les derniers termes affichés sont :

2,967	2,968	2,968	2,968	2,969	2,969	2,969	2,970	2,970	2,970

Quelles conjectures peut-on émettre concernant la suite (v_n) ?
▶3. a. Démontrer par récurrence que, pour tout entier naturel n, $0 < v_n < 3$.
b. Démontrer que, pour tout entier naturel n, $v_{n+1} - v_n = \frac{(3-v_n)^2}{6-v_n}$. La suite (v_n) est-elle monotone ?
c. Démontrer que la suite (v_n) est convergente.

Partie B Recherche de la limite de la suite (v_n)

On considère la suite (w_n) définie pour tout n entier naturel par $w_n = \frac{1}{v_n - 3}$.
▶1. Démontrer que (w_n) est une suite arithmétique de raison $-\frac{1}{3}$.
▶2. En déduire l'expression de (w_n), puis celle de (v_n) en fonction de n.
▶3. Déterminer la limite de la suite (v_n).

ANNEXE de l'EXERCICE 3, à rendre avec la copie

Représentation graphique $\mathscr{C}_1$ de la fonction f_1.