EXERCICE 1 (5 points)

Commun à tous les candidats

Les trois parties A, B et C peuvent être traitées de façon indépendante.
Les probabilités seront arrondies au dix millième.
Un élève doit se rendre à son lycée chaque matin pour 8h00. Pour cela, il utilise, selon les jours, deux moyens de transport : le vélo ou le bus.

Partie A

L'élève part tous les jours à 7h40 de son domicile et doit arriver à 8h00 à son lycée. Il prend le vélo 7 jours sur 10 et le bus le reste du temps. Les jours où il prend le vélo, il arrive à l'heure dans 99,4% des cas et lorsqu'il prend le bus, il arrive en retard dans 5% des cas.
On choisit une date au hasard en période scolaire et on note V l'évènement « L'élève se rend au lycée à vélo », B l'évènement « l'élève se rend au lycée en bus » et R l'évènement « L'élève arrive en retard au lycée ».

▶1. Traduire la situation par un arbre de probabilités.
▶2. Déterminer la probabilité de l'évènement $V \cap R$.
▶3. Démontrer que la probabilité de l'évènement R est 0,0192.
▶4. Un jour donné, l'élève est arrivé en retard au lycée. Quelle est la probabilité qu'il s'y soit rendu en bus ?

Partie B : le vélo

On suppose dans cette partie que l'élève utilise le vélo pour se rendre à son lycée. Lorsqu'il utilise le vélo, on modélise son temps de parcours, exprimé en minutes, entre son domicile et son lycée par une variable aléatoire T qui suit le loi normale d'espérance $\mu = 17$ et d'écart-type $\sigma = 1{,}2$.

▶1. Déterminer la probabilité que l'élève mette entre 15 et 20 minutes pour se rendre à son lycée.
▶2. Il part de son domicile à vélo à 7h40. Quelle est la probabilité qu'il soit en retard au lycée ?
▶3. L'élève part à vélo. Avant quelle heure doit-il partir pour arriver à l'heure au lycée avec une probabilité de 0,9 ? Arrondir le résultat à la minute près.

Partie C : le bus

Lorsque l'élève utilise le bus, on modélise son temps de parcours, exprimé en minutes, entre son domicile et son lycée par une variable aléatoire T' qui suit la loi normale d'espérance $\mu' = 15$ et d'écart-type σ'.
On sait que la probabilité qu'il mette plus de 20 minutes pour se rendre à son lycée en bus est de 0,05.
On note Z' la variable aléatoire égale à $\frac{T'-15}{\sigma'}$.

▶1. Quelle loi la variable aléatoire Z' suit-elle ?
▶2. Déterminer une valeur approchée à 0,01 près de l'écart-type σ' de la variable aléatoire T'.

EXERCICE 2 (5 points)

Commun à tous les candidats

Pour chacune des propositions suivantes, indiquer si elle est vraie ou fausse et justifier chaque réponse. Une réponse non justifiée ne sera pas prise en compte.

On se place dans l'espace muni d'un repère orthonormé. On considère le plan $\mathfrak{P}$ d'équation

$x - y + 3z + 1 = 0$ et la droite $\mathfrak{D}$ dont une représentation paramétrique est $\begin{cases} x = 2t \\ y = 1 + t \\ z = -5 + 3t \end{cases}$ $t \in \mathbb{R}$.

On donne les points $A(1; 1; 0)$, $B(3; 0; -1)$ et $C(7; 1; -2)$.

Proposition 1 :

Une représentation paramétrique de la droite (AB) est $\begin{cases} x = 5 - 2t \\ y = -1 + t \\ z = -2 + t \end{cases}$ $t \in \mathbb{R}$.

Proposition 2 :

Les droites $\mathfrak{D}$ et (AB) sont orthogonales.

Proposition 3 :

Les droites $\mathfrak{D}$ et (AB) sont coplanaires.

Proposition 4 :

La droite $\mathfrak{D}$ coupe le plan $\mathfrak{P}$ au point E de coordonnées $(8; -3; -4)$.

Proposition 5 :

Les plans $\mathfrak{P}$ et (ABC) sont parallèles.

EXERCICE 3 (5 points)

Commun à tous les candidats

Soit f la fonction définie sur l'intervalle $[0; +\infty[$ par $f(x) = x\,e^{-x}$.

On note $\mathfrak{C}$ la courbe représentative de f dans un repère orthogonal.

Partie A

▶1. On note f' la fonction dérivée de la fonction f sur l'intervalle $[0; +\infty[$.

Pour tout réel x de l'intervalle $[0; +\infty[$, calculer $f'(x)$. En déduire les variations de la fonction f sur l'intervalle $[0; +\infty[$.

▶2. Déterminer la limite de la fonction f en $+\infty$.Quelle interprétation graphique peut-on faire de ce résultat ?

Partie B

Soit $\mathfrak{A}$ la fonction définie sur l'intervalle $[0; +\infty[$ de la façon suivante : pour tout réel t de l'intervalle $[0; +\infty[$, $\mathfrak{A}(t)$ est l'aire, en unités d'aire, du domaine délimité par l'axe des abscisses, la courbe $\mathfrak{C}$ et les droites d'équations $x = 0$ et $x = t$.

▶1. Déterminer le sens de variation de la fonction $\mathfrak{A}$.

▶2. On admet que l'aire du domaine délimité par la courbe $\mathfrak{C}$ et l'axe des abscisses est égale à 1 unité d'aire. Que peut-on en déduire pour la fonction $\mathfrak{A}$?

▶3. On cherche à prouver l'existence d'un nombre réel α tel que la droite d'équation $x = \alpha$ partage le domaine compris entre l'axe des abscisses et la courbe $\mathcal{C}$, en deux parties de même aire, et à trouver une valeur approchée de ce réel.

a) Démontrer que l'équation $\mathcal{A}(t) = \frac{1}{2}$ admet une unique solution sur l'intervalle $[0; +\infty[$.

b) Sur le graphique fourni en **annexe (à rendre avec la copie)** sont tracées la courbe $\mathcal{C}$, ainsi que la courbe Γ représentant la fonction $\mathcal{A}$.

Sur le graphique de l'**annexe**, identifier les courbes $\mathcal{C}$ et Γ, puis tracer la droite d'équation $y = \frac{1}{2}$. En déduire une valeur approchée du réel α. Hachurer le domaine correspondant à $\mathcal{A}(\alpha)$.

▶4. On définit la fonction g sur l'intervalle $[0; +\infty[$ par $g(x) = (x + 1)e^{-x}$.

a) On note g' la fonction dérivée de la fonction g sur l'intervalle $[0; +\infty[$.
Pour tout réel x de l'intervalle $[0; +\infty[$, calculer $g'(x)$.

b) En déduire, pour tout réel t de l'intervalle $[0; +\infty[$, une expression de $\mathcal{A}(t)$.

c) Calculer une valeur approchée à 10^{-2} près de $\mathcal{A}(6)$.

EXERCICE 4 (5 points)

Candidats n'ayant pas suivi l'enseignement de spécialité

On considère la suite de nombres complexes (z_n) définie par $z_0 = \sqrt{3} - i$ et pour tout entier naturel n : $z_{n+1} = (1 + i)z_n$. *Les parties A et B peuvent être traitées de façon indépendante.*

Partie A

Pour tout entier naturel n, on pose $u_n = |z_n|$.

▶1. Calculer u_0.

▶2. Démontrer que (u_n) est la suite géométrique de raison $\sqrt{2}$ et de premier terme 2.

▶3. Pour tout entier naturel n, exprimer u_n en fonction de n.

▶4. Déterminer la limite de la suite (u_n).

▶5. Étant donné un réel positif p, on souhaite déterminer, à l'aide d'un algorithme, la plus petite valeur de l'entier naturel n telle que $u_n > p$.

Recopier l'algorithme ci-dessous et le compléter par les instructions de traitement et de sortie, de façon à afficher la valeur cherchée de l'entier n.

Variables : u est un réel p est un réel n est un entier **Initialisation :** Affecter à n la valeur 0 Affecter à u la valeur 2 **Entrée :** Demander la valeur de p **Traitement :** **Sortie :**

Partie B

▶1. Déterminer la forme algébrique de z_1.

▶2. Déterminer la forme exponentielle de z_0 et de $1 + i$. En déduire la forme exponentielle de z_1.

▶3. Déduire des questions précédentes la valeur exacte de $\cos\left(\frac{\pi}{12}\right)$.

EXERCICE 4 (5 points)

Candidats ayant suivi l'enseignement de spécialité

Un laboratoire étudie la propagation d'une maladie sur une population.

Un *individu sain* est un individu n'ayant jamais été touché par la maladie.

Un *individu malade* est un individu qui a été touché par la maladie et non guéri.

Un *individu guéri* est un individu qui a été touché par la maladie et qui a guéri.

Une fois guéri, un individu est immunisé et ne peut plus tomber malade.

Les premières observations nous montrent que, d'un jour au jour suivant :

- 5% des individus tombent malades ;
- 20% des individus guérissent.

Pour tout entier naturel n, on note a_n la proportion d'individus sains n jours après le début de l'expérience, b_n la proportion d'individus malades n jours après le début de l'expérience, et c_n celle d'individus guéris n jours après le début de l'expérience.

On suppose qu'au début de l'expérience, tous les individus sont sains, c'est-à-dire que $a_0 = 1$, $b_0 = 0$ et $c_0 = 0$.

▶1. Calculer a_1, b_1 et c_1.

▶2. a) Quelle est la proportion d'individus sains qui restent sains d'un jour au jour suivant ? En déduire a_{n+1} en fonction de a_n.

b) Exprimer b_{n+1} en fonction de a_n et de b_n.

On admet que $c_{n+1} = 0{,}2\, b_n + c_n$. Pour tout entier naturel n, on définit $U_n = \begin{pmatrix} a_n \\ b_n \\ c_n \end{pmatrix}$.

On définit les matrices $A = \begin{pmatrix} 0{,}95 & 0 & 0 \\ 0{,}05 & 0{,}8 & 0 \\ 0 & 0{,}2 & 1 \end{pmatrix}$ et $D = \begin{pmatrix} 0{,}95 & 0 & 0 \\ 0 & 0{,}8 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$.

On admet qu'il existe une matrice inversible P telle que $D = P^{-1} \times A \times P$ et que, pour tout entier naturel n supérieur ou égal à 1, $A^n = P \times D^n \times P^{-1}$.

▶3. a) Vérifier que, pour tout entier naturel n, $U_{n+1} = A \times U_n$. On admet que, pour tout entier naturel n, $U_n = A^n \times U_0$.

b) Démontrer par récurrence que, pour tout entier naturel n, $D^n = \begin{pmatrix} 0{,}95^n & 0 & 0 \\ 0 & 0{,}8^n & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$.

On admet que $A^n = \begin{pmatrix} 0{,}95^n & 0 & 0 \\ \frac{1}{3}(0{,}95^n - 0{,}8^n) & 0{,}8^n & 0 \\ \frac{1}{3}(3 - 4 \times 0{,}95^n + 0{,}8^n) & 1 - 0{,}8^n & 1 \end{pmatrix}$.

▶4. a) Vérifier que pour tout entier naturel n, $b_n = \frac{1}{3}(0{,}95^n - 0{,}8^n)$.

b) Déterminer la limite de la suite (b_n).

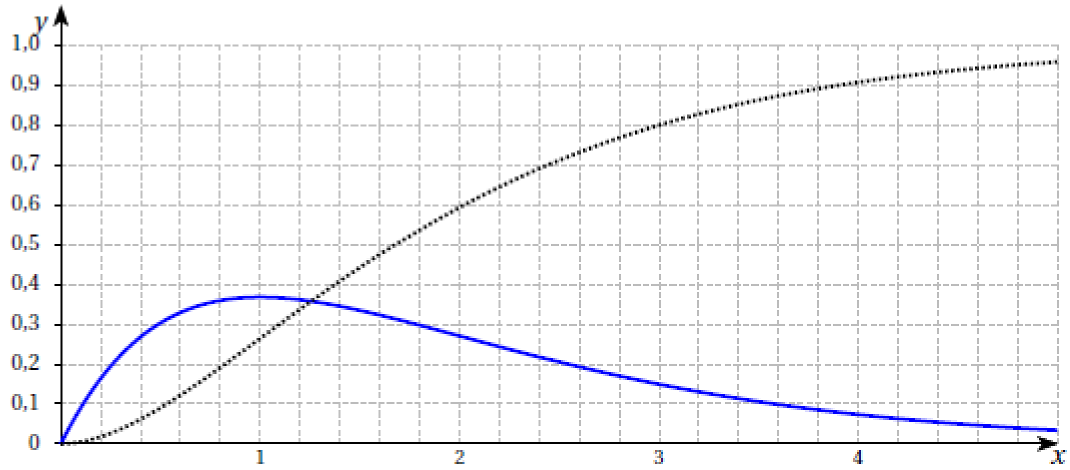
c) On admet que la proportion d'individus malades croît pendant plusieurs jours, puis décroit. On souhaite déterminer le pic épidémique, c'est à dire le moment où la proportion d'individus malades est à son maximum.

À cet effet, on utilise l'algorithme donné en **annexe 2 (à rendre avec la copie)**, dans lequel on compare les termes successifs de la suite (b_n).

Compléter l'algorithme de façon qu'il affiche le rang du jour où le pic épidémique est atteint et compléter le tableau fourni en **annexe 2**. Conclure.

Annexe 1 - *À rendre avec la copie*
EXERCICE 3

Représentations graphiques des fonctions f et h



Annexe 2 - *À rendre avec la copie*
EXERCICE 4

Algorithme et tableau à compléter

Variables :
b, b', x, y sont des réels
k est un entier naturel
n est un entier
Initialisation :
Affecter à n la valeur 0
Affecter à b' la valeur 0,05
Affecter à k la valeur 0
Affecter à x la valeur 0,95
Affecter à y la valeur 0,8
Traitement :
Tant que $b < b'$ faire :
Affecter à k la valeur $k + 1$
Affecter à b la valeur b'
Affecter à x la valeur $0,95x$
Affecter à y la valeur $0,80y$
Affecter à b' la valeur ⋯⋯
Fin Tant que
Sortie :
Afficher ⋯⋯

	k	b	c	d	b'	Test : $b < b'$?
Après le 7^e passage dans la boucle Tant que	7	0,1628	0,6634	0,1678	0,1652	VRAI
Après le 8^e passage éventuel dans la boucle Tant que						
Après le 9^e passage éventuel dans la boucle Tant que						