Table des matières

1. Variation de la fonction racine carrée

Propriété :
La fonction racine carrée $f : x \longmapsto \sqrt{x}$ est croissante sur [0,+∞[.

Démonstration
Une fonction est croissante lorsque :
si $a \leq b$ alors $f(a) \leq f(b)$
On suppose donc que a et b sont deux réels tels que $0 \leq a \leq b$ donc $a - b \leq 0$

$$f(a) - f(b) = \sqrt{a} - \sqrt{b} = \frac{(\sqrt{a} - \sqrt{b})(\sqrt{a} + \sqrt{b})}{\sqrt{a} + \sqrt{b}}$$

$$f(a) - f(b) = \frac{a - b}{\sqrt{a} + \sqrt{b}} \leq 0 \ \text{ donc } \ \sqrt{a} \leq \sqrt{b}$$

La fonction $x \mapsto \sqrt{x}$ est donc croissante sur $[0; +\infty[$■

2. Position relative de fonctions

Propriété :

Pour tout $x \in [0;1]$, $x^2 \leq x \leq \sqrt{x}$

Pour tout $x \in [1;+\infty[$, $\sqrt{x} \leq x \leq x^2$

Démonstration

$$x^2 - x = x(x-1)$$

Pour $0 \leq x \leq 1$
$x \geq 0$
$x - 1 \leq 0$
donc $x(x-1) \leq 0$
soit $x^2 \leq x$

Pour $1 \leq x$
$x \geq 0$
$x - 1 \geq 0$
donc $x(x-1) \geq 0$
soit $x^2 \geq x$

$$x - \sqrt{x} = \sqrt{x}\left(\sqrt{x} - 1\right)$$

Pour $0 \leq x \leq 1$
$\sqrt{x} - 1 \leq 0$
donc $x \leq \sqrt{x}$

Pour $1 \leq x$
$\sqrt{x} - 1 \geq 0$
donc $x \geq \sqrt{x}$ ■

3. Somme des n premiers entiers

Propriété :

$$1 + 2 + 3 + \cdots + (n-1) + n = \frac{n(n+1)}{2}$$

Démonstration

On pose $S = 1 + 2 + 3 + \cdots + (n-1) + n$

$$2 \times S = \begin{matrix} 1 + & 2 + & 3 + \cdots + (n-2) + (n-1) + n \\ +n + (n-1) + & (n-2) + \cdots + 3 & +2 \quad +1 \end{matrix}$$

$$2 \times S = (n+1) + (n+1) + \cdots + (n+1) = n(n+1)$$

$$\text{donc } S = \frac{n(n+1)}{2} \blacksquare$$

4. Somme des n premiers termes d'une suite géométriques de 1er terme 1

Propriété :

$$\text{si } q \neq 1 \text{ alors } 1 + q + q^2 + \cdots + q^n = \frac{1 - q^{n+1}}{1 - q}$$

Démonstration

si $q \neq 1$ alors on pose $S = 1 + q + q^2 + \cdots + q^n$

$$(1-q)S = S - qS = 1 + q + q^2 + \cdots + q^n - q - q^2 - q^3 - \cdots - q^n - q^{n+1} = 1 - q^{n+1}$$

$$\text{donc } S = \frac{1-q^{n+1}}{1-q} \blacksquare$$

5. Equation cartésienne d'une droite

Propriété :

Toute droite possède une **équation cartésienne** du type

$$ax + by + c = 0 \text{ avec } (a;b) \neq (0;0).$$

Un vecteur directeur est alors $\vec{u}\binom{-b}{a}$

Démonstration

Soit d la droite de vecteur directeur $\vec{u}\binom{a}{b}$ qui passe par le point $A(x_A; y_A)$.

$$M(x;y) \in d \Leftrightarrow \overrightarrow{AM}\begin{pmatrix} x - x_A \\ y - y_A \end{pmatrix} \text{ et } \vec{u}\begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix} \text{ sont colinéaires}$$

$$\Leftrightarrow b(x - x_A) - a(y - y_A) = 0$$

$$\Leftrightarrow bx - bx_A - ay + ay_A = 0$$

$$\Leftrightarrow bx - ay - bx_A + ay_A = 0$$

Réciproquement : On note d l'ensemble des points $M(x; y)$ tels que $ax + by + c = 0$ avec $(a; b) \neq (0; 0)$

$$a^2 + b^2 \neq 0$$

Soit $A\left(\frac{-ac}{a^2+b^2}; \frac{-bc}{a^2+b^2}\right)$, $\quad a\frac{-ac}{a^2+b^2} + b\frac{-bc}{a^2+b^2} + c = \frac{-a^2c}{a^2+b^2} + \frac{-b^2c}{a^2+b^2} + c = \frac{-c(a^2+b^2)}{a^2+b^2} + c = 0$

donc $A\left(\frac{-ac}{a^2+b^2}; \frac{-bc}{a^2+b^2}\right) \in d$

soit $\vec{u}\binom{-b}{a}$ et $M(x; y)$ tels que $ax + by + c = 0 \Leftrightarrow y = \frac{-ax-c}{b}$

$$\overrightarrow{AM}\begin{pmatrix} x + \dfrac{ac}{a^2 + b^2} \\ y + \dfrac{bc}{a^2 + b^2} \end{pmatrix}$$

$$-b\left(y + \frac{bc}{a^2 + b^2}\right) - a\left(x + \frac{ac}{a^2 + b^2}\right) = -by - \frac{b^2c}{a^2 + b^2} - ax - \frac{a^2c}{a^2 + b^2}$$

$$= -ax - by - \frac{(a^2 + b^2)c}{a^2 + b^2} = -ax - by - c = 0$$

donc $\overrightarrow{AM}$ et $\vec{u}$ sont colinéaires

donc d la droite de vecteur directeur $\vec{u}$ qui passe par le point A.■

6. Produit scalaire et coordonnées

Propriété :

Soit un repère orthonormé $(0; \vec{\imath}; \vec{\jmath})$ et deux vecteurs $\vec{u}\binom{x}{y}$ et $\vec{v}\binom{x'}{y'}$:

$$\vec{u}.\vec{v} = xx' + yy'$$

Démonstration

$\vec{u}\binom{x}{y}$ et $\vec{v}\binom{x'}{y'}$

$\|\vec{u}\| = \sqrt{x^2 + y^2}$ et $\|\vec{v}\| = \sqrt{x'^2 + y'^2}$

$\|\vec{v} - \vec{u}\| = \sqrt{(x' - x)^2 + (y' - y)^2}$

On sait que $\vec{u}.\vec{v} = \frac{1}{2}(\|\vec{u}\|^2 + \|\vec{v}\|^2 - \|\vec{v} - \vec{u}\|^2)$

$\vec{u}.\vec{v} = \frac{1}{2}(x^2 + y^2 + x'^2 + y'^2 - (x' - x)^2 - (y' - y)^2)$

$$\vec{u}.\vec{v} = xx' + yy' ■$$

7. Produit scalaire et projeté orthogonal

Propriété :

Soit A, B et C trois points quelconques,

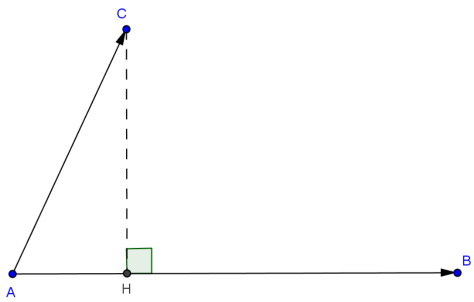
Si H le pied de la hauteur issue de C du triangle ABC

(H s'appelle le projeté orthogonal de C sur (AB))

alors $\overrightarrow{AB}.\overrightarrow{AC} = \overrightarrow{AB}.\overrightarrow{AH}$

Démonstration :

$$\overrightarrow{AB}.\overrightarrow{AC} = \overrightarrow{AB}.\left(\overrightarrow{AH} + \overrightarrow{HC}\right) = \overrightarrow{AB}.\overrightarrow{AH} + \underbrace{\overrightarrow{AB}.\overrightarrow{HC}}_{0} = \overrightarrow{AB}.\overrightarrow{AH} ■$$

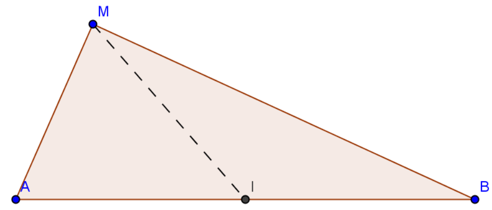


8. Produit scalaire et coordonnées

Propriété :

Soit ABM un triangle, si I est le milieu de $[AB]$ alors

$$MA^2 + MB^2 = 2MI^2 + \frac{1}{2}AB^2$$



Démonstration

$$MA^2 + MB^2 = \overrightarrow{MA}^2 + \overrightarrow{MB}^2 = \left(\overrightarrow{MI} + \overrightarrow{IA}\right)^2 + \left(\overrightarrow{MI} + \overrightarrow{IB}\right)^2$$

$$MA^2 + MB^2 = \overrightarrow{MI}^2 + 2\overrightarrow{MI}.\overrightarrow{IA} + \overrightarrow{IA}^2 + \overrightarrow{MI}^2 + 2\overrightarrow{MI}.\overrightarrow{IB} + \overrightarrow{IB}^2$$

$$MA^2 + MB^2 = 2MI^2 + 2\overrightarrow{MI}.\left(\overrightarrow{IA} + \overrightarrow{IB}\right) + \left(\frac{1}{2}\overrightarrow{BA}\right)^2 + \left(\frac{1}{2}\overrightarrow{AB}\right)^2$$

$$MA^2 + MB^2 = 2MI^2 + 0 + \frac{1}{4}\overrightarrow{BA}^2 + \frac{1}{4}\overrightarrow{AB}^2$$

$$MA^2 + MB^2 = 2MI^2 + \frac{1}{2}AB^2 \blacksquare$$

9. Orthogonalité de deux vecteurs

Propriété :

Deux vecteurs $\vec{u}$ et $\vec{v}$ sont orthogonaux si et seulement si $\vec{u}.\vec{v} = 0$.

Démonstration

Soit M et N tels que $\vec{u} = \overrightarrow{OM}$ et $\vec{v} = \overrightarrow{ON}$

$$\vec{v} - \vec{u} = \overrightarrow{ON} - \overrightarrow{OM} = \overrightarrow{ON} + \overrightarrow{MO} = \overrightarrow{MO} + \overrightarrow{ON} = \overrightarrow{MN}$$

Condition nécessaire :

Supposons que $\vec{u}$ et $\vec{v}$ soient orthogonaux et démontrons que $\vec{u}.\vec{v} = 0$

$\vec{u} \perp \vec{v}$ donc le triangle OMN est rectangle en O

d'après le théorème de Pythagore : $MN^2 = MO^2 + ON^2$

$$\vec{u}.\vec{v} = \frac{1}{2}(\|\vec{u}\|^2 + \|\vec{v}\|^2 - \|\vec{v} - \vec{u}\|^2)$$

$$\vec{u}.\vec{v} = \frac{1}{2}(OM^2 + ON^2 - MN^2) = 0$$

Condition suffisante :

Supposons que $\vec{u}.\vec{v} = 0$ et démontrons que $\vec{u}$ et $\vec{v}$ soient orthogonaux

$$\vec{u}.\vec{v} = 0 = \frac{1}{2}(\|\vec{u}\|^2 + \|\vec{v}\|^2 - \|\vec{v} - \vec{u}\|^2) = \frac{1}{2}(OM^2 + ON^2 - MN^2) = 0$$

donc $MN^2 = MO^2 + ON^2$

d'après la réciproque du théorème de Pythagore le triangle OMN est rectangle en O

donc $\vec{u} \perp \vec{v}$ $\blacksquare$

10. Colinéarité de deux vecteurs

Propriété :

Deux vecteurs $\vec{u}$ et $\vec{v}$ non nuls sont colinéaires si et seulement si $\vec{u}.\vec{v} = \pm \|\vec{u}\| \times \|\vec{v}\|$.

Démonstration

Condition nécessaire :

Supposons que $\vec{u}$ et $\vec{v}$ sont colinéaires et démontrons que $\vec{u}.\vec{v} = \pm \|\vec{u}\| \times \|\vec{v}\|$

$$\vec{u}.\vec{v} = \|\vec{u}\| \times \|\vec{v}\| \times \cos(\vec{u},\vec{v})$$

$\vec{u}$ et $\vec{v}$ ont la même direction et le même sens
alors $(\vec{u},\vec{v}) = 0\ (2\pi)$
donc $\cos(\vec{u},\vec{v}) = 1$
et donc $\vec{u}.\vec{v} = \|\vec{u}\| \times \|\vec{v}\|$

$\vec{u}$ et $\vec{v}$ ont la même direction mais pas le même sens
alors $(\vec{u},\vec{v}) = \pi\ (2\pi)$
donc $\cos(\vec{u},\vec{v}) = -1$
et donc $\vec{u}.\vec{v} = -\|\vec{u}\| \times \|\vec{v}\|$

Condition suffisante :

Supposons que $\vec{u}.\vec{v} = \pm \|\vec{u}\| \times \|\vec{v}\|$ et démontrons que $\vec{u}$ et $\vec{v}$ sont colinéaires

$$\vec{u}.\vec{v} = \|\vec{u}\| \times \|\vec{v}\| \times \cos(\vec{u},\vec{v}) = \pm \|\vec{u}\| \times \|\vec{v}\|$$

donc $\cos(\vec{u},\vec{v}) = \pm 1$

par conséquent $(\vec{u},\vec{v}) = 0\ (2\pi)$ ou bien $(\vec{u},\vec{v}) = \pi\ (2\pi)$

et donc $\vec{u}$ et $\vec{v}$ sont colinéaires ■

11. Equation de cercles

Propriété :

L'équation cartésienne du cercle C de centre $A(x_A ; y_A)$ et de rayon R est :

$$(x - x_A)^2 + (y - y_A)^2 = R^2$$

Démonstration

$$M(x;y) \in \text{C} \iff AM = R$$

$$AM^2 = R^2 \iff \overrightarrow{AM}.\overrightarrow{AM} = R^2$$

$$\overrightarrow{AM}\begin{pmatrix} x - x_A \\ y - y_A \end{pmatrix}$$

donc

$$(x - x_A)^2 + (y - y_A)^2 = R^2 \ ■$$

12. Formule de duplication

Propriété :

$$\cos(a - b) = \cos a \cos b + \sin a \sin b$$

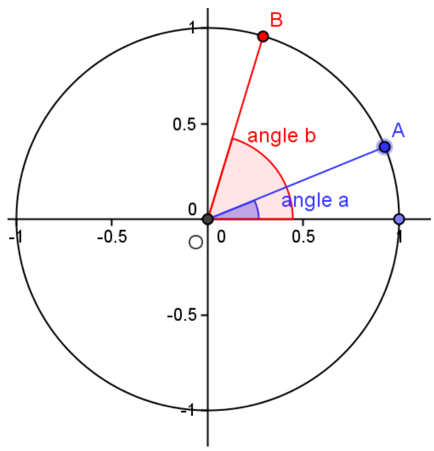
Démonstration :

Dans un repère orthonormé $(O;\vec{\imath};\vec{\jmath})$,

On appelle A et B les points du cercle trigonométrique tels que :

$(\vec{\imath};\overrightarrow{OA}) = a$ et $(\vec{\imath};\overrightarrow{OB}) = b$

donc $A(\cos a ; \sin a)$ et $B(\cos b ; \sin b)$



$$a-b=(\vec{\imath};\overrightarrow{OA})-(\vec{\imath};\overrightarrow{OB})=(\vec{\imath};\overrightarrow{OA})+(\overrightarrow{OB};\vec{\imath})=(\overrightarrow{OB};\vec{\imath})+(\vec{\imath};\overrightarrow{OA})=(\overrightarrow{OB};\overrightarrow{OA})$$

$$\cos(a-b)=\cos(\overrightarrow{OB};\overrightarrow{OA})=\frac{\overrightarrow{OB}.\overrightarrow{OA}}{OB\times OA}=\overrightarrow{OB}.\overrightarrow{OA}$$

$$\cos(a-b)=\overrightarrow{OB}.\overrightarrow{OA}=\cos a\cos b+\sin a\sin b\ \blacksquare$$

13. Moyenne et variance

Propriété :

$$E(aX+b)=aE(X)+b \qquad V(aX)=a^2V(X)$$

Démonstration

Soient a et b deux réels quelconques :

Valeurs de X : x_i	x_1	x_2	…	x_n
$P(X=x_i)$	$P(X=x_1)$	$P(X=x_2)$		$P(X=x_n)$
Valeurs de $aX+b$	ax_1+b	ax_2+b	…	ax_n+b

$$E(aX+b)=\sum_{i=1}^{n}(ax_i+b)P(X=x_i)=(ax_1+b)P(X=x_1)+\cdots+(ax_n+b)P(X=x_n)$$

$$=ax_1P(X=x_1)+bP(X=x_1)+\cdots+ax_nP(X=x_{1n})+bP(X=x_n)$$

$$=a[x_1P(X=x_1)+\cdots+x_nP(X=x_{1n})]+b[P(X=x_1)+\cdots+P(X=x_n)]$$

$E(aX+b)=aE(X)+b$

$$V(aX)=\sum_{i=1}^{n}\left(ax_i-E(aX)\right)^2P(X=x_i)=\left(ax_1-E(aX)\right)^2P(X=x_1)+\cdots+\left(ax_n-E(aX)\right)^2P(X=x_n)$$

$$=\left(ax_1-aE(X)\right)^2P(X=x_1)+\cdots+\left(ax_n-aE(X)\right)^2P(X=x_n)$$

$$=\left(a\left(x_1-E(X)\right)\right)^2P(X=x_1)+\cdots+\left(a\left(x_n-E(X)\right)\right)^2P(X=x_n)$$

$$=a^2\left(x_1-E(X)\right)^2P(X=x_1)+\cdots+a^2\left(x_n-E(X)\right)^2P(X=x_n)$$

$$=a^2\left[\left(x_1-E(X)\right)^2P(X=x_1)+\cdots+\left(x_n-E(X)\right)^2P(X=x_n)\right]$$

$V(aX)=a^2V(X)\blacksquare$

14. Coefficients binomiaux

Propriété : Pour tout entier k, $0\le k\le n-1$

$$\binom{n+1}{k+1}=\binom{n}{k}+\binom{n}{k+1}$$

Démonstration :

$\binom{n+1}{k+1}$ est le nombre de chemin réalisant $k+1$ succès parmi $n+1$ réalisations. Ces chemins sont de deux types :

La 1re réalisation est un succès, il y a donc ensuite k succès parmi n réalisations soit $\binom{n}{k}$.

La 1re réalisation est un échec, il y a donc ensuite $k+1$ succès parmi n réalisations soit $\binom{n}{k+1}$,

donc $\binom{n+1}{k+1}=\binom{n}{k}+\binom{n}{k+1}\blacksquare$