Exercice 1. (6 points)

On étudie la suite (u_n) définie, pour tout $n \in \mathbb{N}$, par

$$u_{n+1} = 2u_n - 1 \text{ et } u_0 = 0.$$

▶1. a) On considère l'algorithme ci-contre. Modifier cet algorithme pour qu'il calcule à partir de quelle valeur de n, $u_n \leq -10^p$ où p est choisi par l'utilisateur.

b) Que permet de conjecturer cet algorithme ?

```
U prend la valeur 0
N prend la valeur 0
Tant que U > −1000
    U prend la valeur 2 × U − 1
    N prend la valeur N + 1
Fin du tant que
Afficher N
```

▶2. On définit la suite (v_n) par, pour tout $n \in \mathbb{N}$,

$$v_n = u_n - 1$$

a) Démontrer que la suite (v_n) est géométrique, on précisera ses éléments caractéristiques.

b) En déduire l'expression de v_n en fonction de n puis celle de u_n.

c) Déterminer alors la limite de la suite (u_n).

Exercice 2. (7 points)

Déterminer, en justifiant, la limite de la suite (u_n) dans les cas ci-dessous :

▶1. $\forall n \in \mathbb{N},\ u_n = 2n^3 - 3n + 1$

▶2. $\forall n \in \mathbb{N},\ u_n = -5n - \dfrac{\sqrt{n}}{4} - 1$

▶3. $\forall n \in \mathbb{N},\ u_n = 2n + (-1)^n$

▶4. $\forall n \in \mathbb{N},\ u_n = \dfrac{2n-1}{3n^2+1}$

Exercice 3. (7 points)

▶1. La suite (u_n) est définie sur $\mathbb{N}^*$ par $u_n = \dfrac{3}{n^2+1}$.

Démontrer, **à l'aide de la définition**, la limite de la suite (u_n).

▶2. Soit $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ et $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ deux suites telles que, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $u_n \leq v_n$ et $\lim\limits_{n\to+\infty} v_n \neq +\infty$.

Démontrer que $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n \neq +\infty$.

▶3. Pour chacune des affirmations suivantes, indiquer si elle est vraie ou fausse en justifiant la réponse.

Affirmation 1.

Si (u_n) est décroissante alors $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n = -\infty$

Affirmation 2.

Si $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n = -\infty$ et $\lim\limits_{n\to+\infty} v_n = +\infty$ alors $\lim\limits_{n\to+\infty} \dfrac{u_n}{v_n} = -1$

Exercice 1. (6 points)

On étudie la suite (u_n) définie, pour tout $n \in \mathbb{N}$, par

$$u_{n+1} = 2u_n - 1 \text{ et } u_0 = 2.$$

▶1. a) On considère l'algorithme ci-contre. Modifier cet algorithme pour qu'il calcule à partir de quelle valeur de n, $u_n \geq 10^p$ où p est choisi par l'utilisateur.
b) Que permet de conjecturer cet algorithme ?

```
U prend la valeur 2
N prend la valeur 0
Tant que U < 1000
    U prend la valeur 2 × U − 1
    N prend la valeur N + 1
Fin du tant que
Afficher N
```

▶2. On définit la suite (v_n) par, pour tout $n \in \mathbb{N}$,

$$v_n = u_n - 1$$

a) Démontrer que la suite (v_n) est géométrique, on précisera ses éléments caractéristiques.
b) En déduire l'expression de v_n en fonction de n puis celle de u_n.
c) Déterminer alors la limite de la suite (u_n).

Exercice 2. (7 points)

Déterminer, en justifiant, la limite de la suite (u_n) dans les cas ci-dessous :

▶1. $\forall n \in \mathbb{N}, \quad u_n = 3n^3 - 2n + 1$

▶2. $\forall n \in \mathbb{N}, \quad u_n = -4n - \dfrac{\sqrt{n}}{5} - 1$

▶3. $\forall n \in \mathbb{N}, \quad u_n = 3n + (-1)^n$

▶4. $\forall n \in \mathbb{N}, \quad u_n = \dfrac{4n-1}{2n^2+1}$

Exercice 3. (7 points)

▶1. La suite (u_n) est définie sur $\mathbb{N}^*$ par $u_n = \dfrac{1}{n^2+3}$.
Démontrer, **à l'aide de la définition**, la limite de la suite (u_n).

▶2. Soit $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ et $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ deux suites telles que, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $u_n \leq v_n$ et $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n \neq -\infty$.
Démontrer que $\lim\limits_{n\to+\infty} v_n \neq -\infty$.

▶3. Pour chacune des affirmations suivantes, indiquer si elle est vraie ou fausse en justifiant la réponse.

Affirmation 1.
Si (u_n) est croissante alors $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n = +\infty$

Affirmation 2.

Si $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n = +\infty$ et $\lim\limits_{n\to+\infty} v_n = -\infty$ alors $\lim\limits_{n\to+\infty} \dfrac{u_n}{v_n} = -1$