TS – Contrôle n°2 – jeudi 5 novembre – Sujet A

gaelle.buffet@ac-montpellier.fr - http://gaellebuffet.free.fr/

EXERCICE 1. (5 points)

▶1. On considère les nombres complexes suivants : $z_1 = -1 + i$ et $z_2 = 3 - 4i$.

a) Ecrire sous forme algébrique $z_1 - z_2$, $(z_1)^2$ et $z_1 \times z_2$.

b) Ecrire sous forme algébrique $\dfrac{z_1}{z_2}$.

▶2. Résoudre, dans $\mathbb{C}$, l'équation $\dfrac{3z-1}{z+1} = i$. On donnera le résultat sous forme algébrique.

EXERCICE 2. (8 points)

▶1. Restitution Organisée de Connaissance :

Démontrer que si une suite (u_n) est croissante et non majorée alors elle tend vers $+\infty$.

▶2. La suite (u_n) est définie par $u_0 = 0$ et $u_{n+1} = \sqrt{\frac{1}{2}u_n^2 + 8}$ pour tout $n \in \mathbb{N}$.

a) Démontrer, par récurrence, que pour tout $n \in \mathbb{N}$: $0 \leq u_n \leq u_{n+1} \leq 8$.

b) En déduire la nature de la suite (u_n).

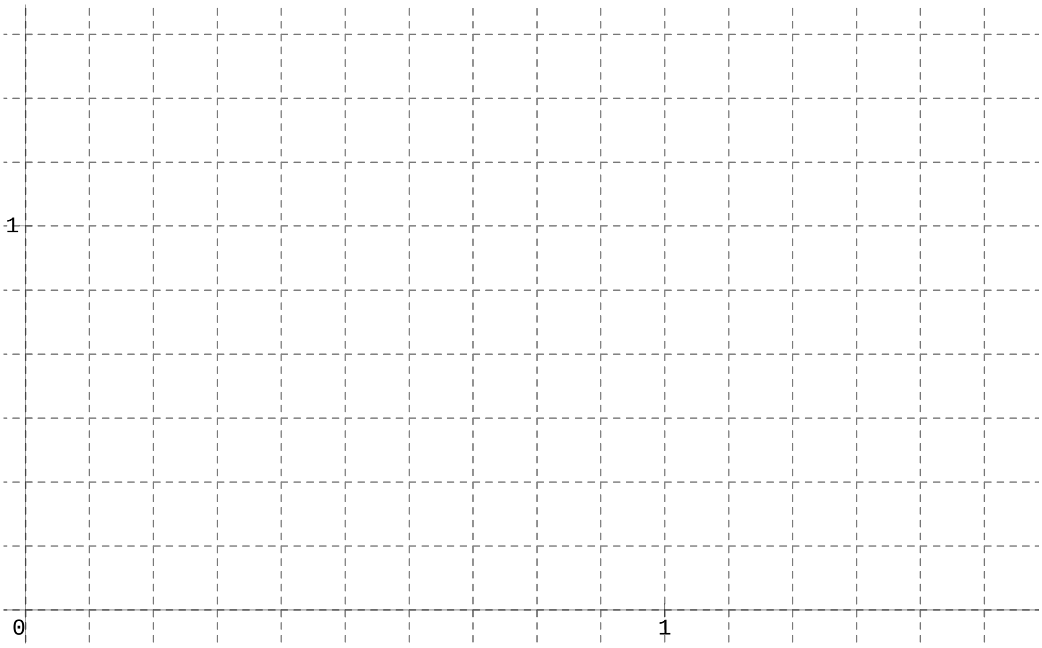
c) Démontrer, par récurrence, que pour tout $n \in \mathbb{N}$: $u_n = 4\sqrt{1 - \dfrac{1}{2^n}}$.

d) En déduire la limite de la suite (u_n).

EXERCICE 3. (7 points)

La suite (u_n) est définie par $u_0 = 0$ et $u_{n+1} = \frac{1}{3}u_n + 1$ pour tout $n \in \mathbb{N}$.

▶1. Tracer les droites $y = x$ et $y = \frac{1}{3}x + 1$, puis placer les quatre premiers termes de la suite (u_n) dans le repère ci-dessous.



▶2. Démontrer par récurrence, que pour tout $n \in \mathbb{N}$: $u_n = \dfrac{3}{2} - \dfrac{1}{2 \times 3^{n-1}}$.

▶3. Déterminer la limite de la suite (u_n).

▶4. Pour tout $n \in \mathbb{N}$, on pose $S_n = u_0 + u_1 + u_2 + \cdots + u_n$, exprimer S_n en fonction de n. Déterminer la limite de la suite (S_n). **(Pour cette question, toute trace de recherche sera prise en compte).**

EXERCICE 1. (5 points)

▶1. On considère les nombres complexes suivants : $z_1 = 2 - 4i$ et $z_2 = -2 + i$.

a) Ecrire sous forme algébrique $z_2 - z_1$, $(z_2)^2$ et $z_1 \times z_2$.

b) Ecrire sous forme algébrique $\dfrac{z_2}{z_1}$.

▶2. Résoudre, dans $\mathbb{C}$, l'équation $\dfrac{2z+1}{z-1} = i$. On donnera le résultat sous forme algébrique.

EXERCICE 2. (8 points)

▶1. Restitution Organisée de Connaissance :

Démontrer que si une suite (u_n) est croissante et non majorée alors elle tend vers $+\infty$.

▶2. La suite (u_n) est définie par $u_0 = 0$ et $u_{n+1} = \sqrt{\frac{1}{2}u_n^2 + 2}$ pour tout $n \in \mathbb{N}$.

a) Démontrer, par récurrence, que pour tout $n \in \mathbb{N}$: $0 \leq u_n \leq u_{n+1} \leq 4$.

b) En déduire la nature de la suite (u_n).

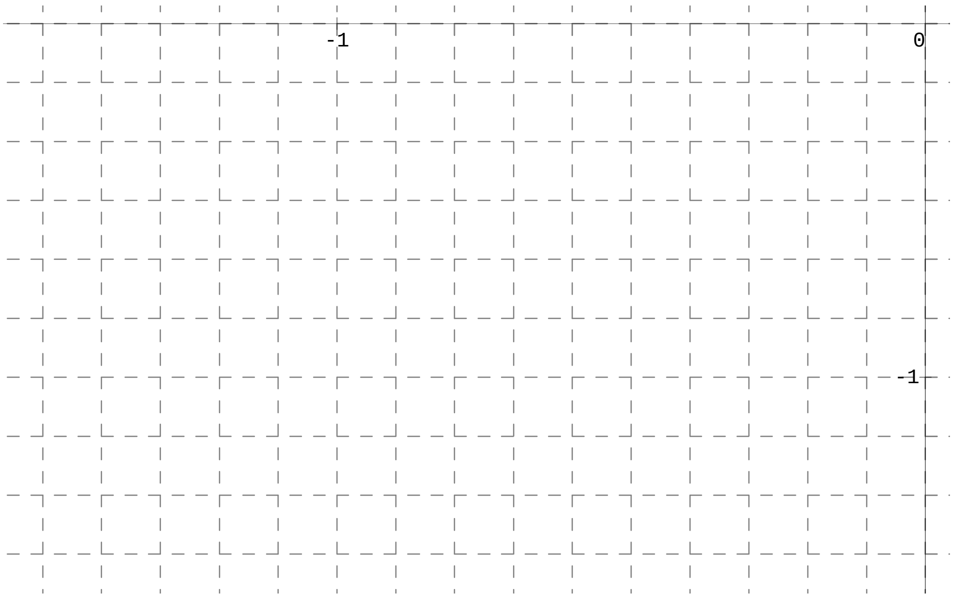
c) Démontrer, par récurrence, que pour tout $n \in \mathbb{N}$: $u_n = 2\sqrt{1 - \dfrac{1}{2^n}}$.

d) En déduire la limite de la suite (u_n).

EXERCICE 3. (7 points)

La suite (u_n) est définie par $u_0 = 0$ et $u_{n+1} = \frac{1}{3}u_n - 1$ pour tout $n \in \mathbb{N}$.

▶1. Tracer les droites $y = x$ et $y = \frac{1}{3}x - 1$, puis placer les quatre premiers termes de la suite (u_n) dans le repère ci-dessous.



▶2. Démontrer par récurrence, que pour tout $n \in \mathbb{N}$: $u_n = \dfrac{1}{2 \times 3^{n-1}} - \dfrac{3}{2}$.

▶3. Déterminer la limite de la suite (u_n).

▶4. Pour tout $n \in \mathbb{N}$, on pose $S_n = u_0 + u_1 + u_2 + \cdots + u_n$, exprimer S_n en fonction de n. Déterminer la limite de la suite (S_n). **(Pour cette question, toute trace de recherche sera prise en compte).**