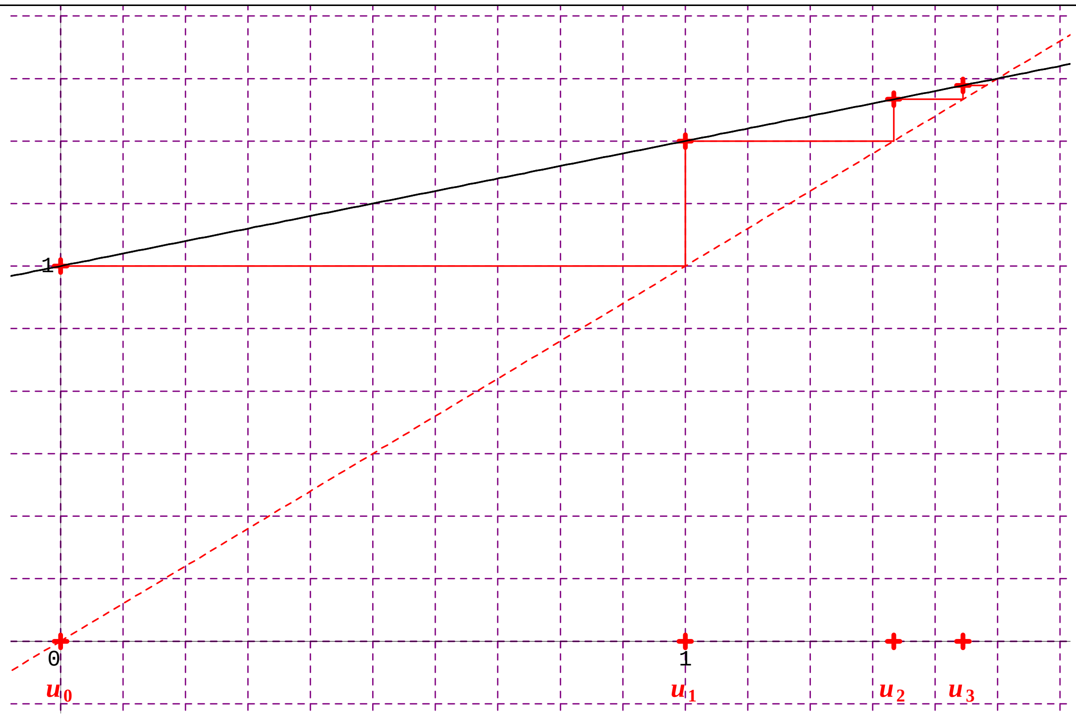
## SUJET A

| | | | |
|---|---|---|---|
| Exercice 1. | **1.** | $z_1 - z_2 = -1 + i - (3 - 4i) = -1 + i - 3 + 4i = -4 + 5i$<br><br>$(z_1)^2 = (-1 + i)^2 = 1 - 2i + i^2 = -2i$<br><br>$z_1 \times z_2 = (-1 + i)(3 - 4i) = -3 + 4i + 3i - 4i^2 = -3 + 7i + 4$<br>$z_1 \times z_2 = 1 + 7i$ | **1,5** |
| | | $\frac{z_1}{z_2} = \frac{-1+i}{3-4i} = \frac{(-1+i)(3+4i)}{(3-4i)(3+4i)} = \frac{-3-4i+3i+4i^2}{9-16i^2} = \frac{-3-i-4}{9+16}$<br>$\frac{z_1}{z_2} = \frac{-7-i}{25}$ | **1,5** |
| | **2.** | $\frac{3z-1}{z+1} = i$<br><br>Méthode n°1<br>$3z - 1 = i(z+1)$<br>$3z - 1 = iz + i$<br>$(3-i)z = 1 + i$<br>$z = \frac{1+i}{3-i} = \frac{(1+i)(3+i)}{(3-i)(3+i)}$<br>$z = \frac{3+i+3i+i^2}{9-i^2} = \frac{3+4i-1}{9+1}$<br>$\boldsymbol{z} = \frac{2+4i}{10} = \frac{2}{10} + \frac{4i}{10} = \frac{\mathbf{1}}{\mathbf{5}} + \frac{\mathbf{2}\boldsymbol{i}}{\mathbf{5}}$<br><br>Méthode n°2<br>$\frac{3z-1}{z+1} - i = 0$<br>$\frac{3z-1-i(z+1)}{z+1} = 0$<br>$3z - 1 - iz - i = 0$<br>$(3-i)z = 1 + i$<br>$z = \frac{1+i}{3-i} = \frac{(1+i)(3+i)}{(3-i)(3+i)}$<br>$z = \frac{3+4i-1}{9+1}$<br>$\boldsymbol{z} = \frac{\mathbf{1}}{\mathbf{5}} + \frac{\mathbf{2}\boldsymbol{i}}{\mathbf{5}}$ | **2** |
| Exercice 2. | **1.** | On suppose que $(u_n)$ est une suite croissante et non majorée, démontrons qu'elle tend, alors, vers $+\infty$.<br>**Soit $\boldsymbol{A}$** $\in \mathbb{R}$ un seuil quelconque,<br>$(u_n)$ est non majorée donc $A$ n'est pas un majorant de la suite $(u_n)$ donc<br>**il existe $\boldsymbol{N}$** $\in \mathbb{N}$ tel que $u_N > A$.<br>De plus, la suite $(u_n)$ est croissante donc, **pour tout $\boldsymbol{n}$** $\in \mathbb{N}$ **tels que $\boldsymbol{n \geq N}$**<br>On a $\boldsymbol{u_n} \geq u_N > A$<br>On en déduit que $\lim\limits_{n \to +\infty} \boldsymbol{u_n} = +\infty$ | **2** |

| | | | |
|---|---|---|---|
| Exercice 2. | 2a | Démontrons par récurrence que $\mathcal{P}(n):\ 0 \leq u_n \leq u_{n+1} \leq 8$ est vraie pour tout $n \in \mathbb{N}$.<br>Initialisation pour $n = 0$ :<br>$u_0 = 0$ et $u_1 = \sqrt{\frac{1}{2}u_0^2 + 8} = \sqrt{8} = 2\sqrt{2}$ et $0 \leq u_0 \leq u_1 \leq 8$<br>donc $\mathcal{P}(0)$ est vraie.<br>Hérédité : On suppose que $\mathcal{P}(n):\ 0 \leq u_n \leq u_{n+1} \leq 8$ est vraie pour $n \in \mathbb{N}$ fixé<br>$0 \leq u_n \leq u_{n+1} \leq 8$<br>$0 \leq u_n^2 \leq u_{n+1}^2 \leq 64$<br>$0 \leq \frac{1}{2}u_n^2 \leq \frac{1}{2}u_{n+1}^2 \leq 32$<br>$8 \leq \frac{1}{2}u_n^2 + 8 \leq \frac{1}{2}u_{n+1}^2 + 8 \leq 40$<br>$\sqrt{8} \leq \sqrt{\frac{1}{2}u_n^2 + 8} \leq \sqrt{\frac{1}{2}u_{n+1}^2 + 8} \leq \sqrt{40}$<br>$0 \leq u_{n+1} \leq u_{n+2} \leq 8$<br>donc $\mathcal{P}(n+1)$ est vraie<br>Par conséquent $0 \leq u_n \leq u_{n+1} \leq 8$ pour tout $n \in \mathbb{N}$ | 2,5 |
| | 2b | La suite $(u_n)$ est donc croissante et majorée par 8, elle est donc convergente. | 0,5 |
| | 2c | Démontrons par récurrence que $\mathcal{P}(n):\ u_n = 4\sqrt{1 - \frac{1}{2^n}}$ est vraie où $n \in \mathbb{N}$.<br>Initialisation pour $n = 0$ :<br>$u_0 = 0$ et $4\sqrt{1 - \frac{1}{2^0}} = 4\sqrt{1-1} = 0 = u_0$ donc $\mathcal{P}(0)$ est vraie.<br>Hérédité : On suppose que $\mathcal{P}(n):\ u_n = 4\sqrt{1 - \frac{1}{2^n}}$ est vraie où $n \in \mathbb{N}$ fixé<br>$u_{n+1} = \sqrt{\frac{1}{2}u_n^2 + 8} = \sqrt{\frac{1}{2}\left(4\sqrt{1 - \frac{1}{2^n}}\right)^2 + 8} = \sqrt{\frac{1}{2} \times 16\left(1 - \frac{1}{2^n}\right) + 8}$ | 2,5 |

| | | | |
|---|---|---|---|
| Exercice 2. | | $u_{n+1}=\sqrt{16\left(\frac{1}{2}-\frac{1}{2^n}\times\frac{1}{2}\right)+8}=\sqrt{16\left(\frac{1}{2}-\frac{1}{2^{n+1}}\right)+\frac{16}{2}}$<br>$=\sqrt{16\left(\frac{1}{2}-\frac{1}{2^{n+1}}+\frac{1}{2}\right)}$<br>$u_{n+1}=4\sqrt{1-\frac{1}{2^{n+1}}}$ donc $\mathcal{P}(n+1)$ est vraie<br>Par conséquent $u_n=4\sqrt{1-\frac{1}{2^n}}$ pour tout $n\in\mathbb{N}$ | |
| | **2d** | $\lim\limits_{n\to+\infty}\frac{1}{2^n}=0$ donc $\lim\limits_{n\to+\infty}u_n=4$ | **0,5** |
| Exercice 3. | **1.** |  | **2** |
| | **2.** | Démontrons par récurrence que $\mathcal{P}(n)$ : $u_n=\frac{3}{2}-\frac{1}{2\times3^{n-1}}$ est vraie pour tout $n\in\mathbb{N}$.<br>Initialisation pour $n=0$ :<br>$u_0=0$ et $\frac{3}{2}-\frac{1}{2\times3^{-1}}=\frac{3}{2}-\frac{3}{2}=0=u_0$ donc $\mathcal{P}(0)$ est vraie.<br>Hérédité : On suppose que $\mathcal{P}(n)$ : $u_n=\frac{3}{2}-\frac{1}{2\times3^{n-1}}$ est vraie pour $n\in\mathbb{N}$ fixé<br>$u_{n+1}=\frac{1}{3}u_n+1=\frac{1}{3}\left(\frac{3}{2}-\frac{1}{2\times3^{n-1}}\right)+1=\frac{1}{3}\times\frac{3}{2}-\frac{1}{3}\times\frac{1}{2\times3^{n-1}}+1$<br>$u_{n+1}=\frac{1}{2}-\frac{1}{2\times3^n}+1=\frac{3}{2}-\frac{1}{2\times3^n}$ donc $\mathcal{P}(n+1)$ est vraie | **3** |

| | | | |
|---|---|---|---|
| | | Par conséquent $u_n = \frac{3}{2} - \frac{1}{2\times 3^{n-1}}$ pour tout $n \in \mathbb{N}$ | |
| | **3.** | $$\lim_{n\to+\infty} \frac{1}{3^{n-1}} = 0 \text{ donc } \lim_{n\to+\infty} u_n = \frac{3}{2}$$ | **1** |
| | **4.** | $\forall n \in \mathbb{N}, S_n = u_0 + u_1 + u_2 + \cdots + u_n$ $$S_n = 0 + \left(\frac{3}{2} - \frac{1}{2\times 3^0}\right) + \left(\frac{3}{2} - \frac{1}{2\times 3^1}\right) + \left(\frac{3}{2} - \frac{1}{2\times 3^2}\right) + \cdots + \left(\frac{3}{2} - \frac{1}{2\times 3^{n-2}}\right) + \left(\frac{3}{2} - \frac{1}{2\times 3^{n-1}}\right)$$ $$S_n = \frac{3}{2}\times n - \underbrace{\frac{1}{2\times 3^0} - \frac{1}{2\times 3^1} - \frac{1}{2\times 3^2} - \cdots - \frac{1}{2\times 3^{n-2}} - \frac{1}{2\times 3^{n-1}}}_{\text{suite géométrique de raison } \frac{1}{3} \text{ et de 1er terme } 1/2}$$ $$S_n = \frac{3}{2}\times n - \frac{1}{2}\times \frac{1-\left(\frac{1}{3}\right)^n}{1-\frac{1}{3}} = \frac{3}{2}\times n - \frac{1}{2}\times \frac{1-\left(\frac{1}{3}\right)^n}{\frac{2}{3}}$$ $$\lim_{n\to+\infty} \left(\frac{1}{3}\right)^n = 0 \text{ et } \lim_{n\to+\infty} \frac{3}{2}n = +\infty \text{ donc } \lim_{n\to+\infty} S_n = +\infty$$ | |

## SUJET B

<table>
<tr><td rowspan="3">Exercice 1.</td><td rowspan="2">1.</td><td>$z_2 - z_1 = -2 + i - (2 - 4i) = -2 + i - 2 + 4i = -4 + 5i$<br><br>$(z_2)^2 = (-2 + i)^2 = 4 - 4i + i^2 = 3 - 4i$<br><br>$z_1 \times z_2 = (2 - 4i)(-2 + i) = -4 + 2i + 8i - 4i^2 = -4 + 10i + 4$<br>$z_1 \times z_2 = 10i$</td><td>1,5</td></tr>
<tr><td>$\frac{z_2}{z_1} = \frac{-2 + i}{2 - 4i} = \frac{(-2 + i)(2 + 4i)}{(2 - 4i)(2 + 4i)} = \frac{-4 - 8i + 2i + 4i^2}{4 - 16i^2} = \frac{-4 - 6i - 4}{4 + 16}$<br>$\frac{z_2}{z_1} = \frac{-8 - 6i}{20} = \frac{-4 - 3i}{10}$</td><td>1,5</td></tr>
<tr><td>2.</td><td>$\frac{2z + 1}{z - 1} = i$<br><br>Méthode n°1<br>$2z + 1 = i(z - 1)$<br>$2z + 1 = iz - i$<br>$(2 - i)z = -1 - i$<br>$z = \frac{-1 - i}{2 - i} = \frac{(-1 - i)(2 + i)}{(2 - i)(2 + i)}$<br>$z = \frac{-2 - i - 2i - i^2}{4 - i^2}$<br>$\boldsymbol{z} = \frac{-1 - 3i}{5} = \boldsymbol{\frac{-1}{5} - \frac{3i}{5}}$<br><br>Méthode n°2<br>$\frac{2z + 1}{z - 1} - i = 0$<br>$\frac{2z + 1 - i(z - 1)}{z - 1} = 0$<br>$2z + 1 - iz + i = 0$<br>$(2 - i)z = -1 - i$<br>$z = \frac{-1 - i}{2 - i} = \frac{(-1 - i)(2 + i)}{(2 - i)(2 + i)}$<br>$z = \frac{-2 - 3i + 1}{4 + 1}$<br>$\boldsymbol{z} = \boldsymbol{\frac{-1}{5} - \frac{3i}{5}}$</td><td>2</td></tr>
<tr><td>Exercice 2.</td><td>1.</td><td>On suppose que $(u_n)$ est une suite croissante et non majorée, démontrons qu'elle tend, alors, vers $+\infty$.<br>**Soit $A$** $\in \mathbb{R}$ un seuil quelconque,<br>$(u_n)$ est non majorée donc $A$ n'est pas un majorant de la suite $(u_n)$ donc<br>**il existe $N$** $\in \mathbb{N}$ tel que $u_N > A$.<br>De plus, la suite $(u_n)$ est croissante donc, **pour tout $n$** $\in \mathbb{N}$ **tels que $n \geq N$**<br>On a $\boldsymbol{u_n} \geq u_N > A$<br>On en déduit que $\lim\limits_{n \to +\infty} \boldsymbol{u_n} = +\infty$</td><td>2</td></tr>
</table>

<table>
<tr><td rowspan="3">Exercice 2.</td><td>2a</td><td>Démontrons par récurrence que $\mathcal{P}(n):\ 0 \leq u_n \leq u_{n+1} \leq 4$ est vraie pour tout $n \in \mathbb{N}$.<br>Initialisation pour $n=0$ :<br>$u_0 = 0$ et $u_1 = \sqrt{\frac{1}{2}u_0^2 + 2} = \sqrt{2}$ et $0 \leq u_0 \leq u_1 \leq 4$<br>donc $\mathcal{P}(0)$ est vraie.<br>Hérédité : On suppose que $\mathcal{P}(n):\ 0 \leq u_n \leq u_{n+1} \leq 4$ est vraie pour $n \in \mathbb{N}$ fixé<br>$$0 \leq u_n \leq u_{n+1} \leq 4$$ $$0 \leq u_n^2 \leq u_{n+1}^2 \leq 16$$ $$0 \leq \frac{1}{2}u_n^2 \leq \frac{1}{2}u_{n+1}^2 \leq 8$$ $$2 \leq \frac{1}{2}u_n^2 + 2 \leq \frac{1}{2}u_{n+1}^2 + 2 \leq 10$$ $$\sqrt{2} \leq \sqrt{\frac{1}{2}u_n^2 + 2} \leq \sqrt{\frac{1}{2}u_{n+1}^2 + 2} \leq \sqrt{10}$$ $$0 \leq u_{n+1} \leq u_{n+2} \leq 4$$ donc $\mathcal{P}(n+1)$ est vraie<br>Par conséquent $0 \leq u_n \leq u_{n+1} \leq 4$ pour tout $n \in \mathbb{N}$</td><td>2,5</td></tr>
<tr><td>2b</td><td>La suite $(u_n)$ est donc croissante et majorée par 4, elle est donc convergente.</td><td>0,5</td></tr>
<tr><td>2c</td><td>Démontrons par récurrence que $\mathcal{P}(n):\ u_n = 2\sqrt{1-\frac{1}{2^n}}$ est vraie où $n \in \mathbb{N}$.<br>Initialisation pour $n=0$ :<br>$$u_0 = 0 \text{ et } 2\sqrt{1-\frac{1}{2^0}} = 2\sqrt{1-1} = 0 = u_0 \text{ donc } \mathcal{P}(0) \text{ est vraie.}$$ Hérédité : On suppose que $\mathcal{P}(n):\ u_n = 2\sqrt{1-\frac{1}{2^n}}$ est vraie où $n \in \mathbb{N}$ fixé<br>$$u_{n+1} = \sqrt{\frac{1}{2}u_n^2 + 2} = \sqrt{\frac{1}{2}\left(2\sqrt{1-\frac{1}{2^n}}\right)^2 + 2} = \sqrt{\frac{1}{2} \times 4\left(1-\frac{1}{2^n}\right) + 2}$$</td><td>2,5</td></tr>
</table>

<table>
<tr>
<td></td>
<td></td>
<td>

$$u_{n+1} = \sqrt{4\left(\frac{1}{2}-\frac{1}{2^n}\times\frac{1}{2}\right)+2} = \sqrt{4\left(\frac{1}{2}-\frac{1}{2^{n+1}}\right)+\frac{4}{2}}$$

$$= \sqrt{4\left(\frac{1}{2}-\frac{1}{2^{n+1}}+\frac{1}{2}\right)}$$

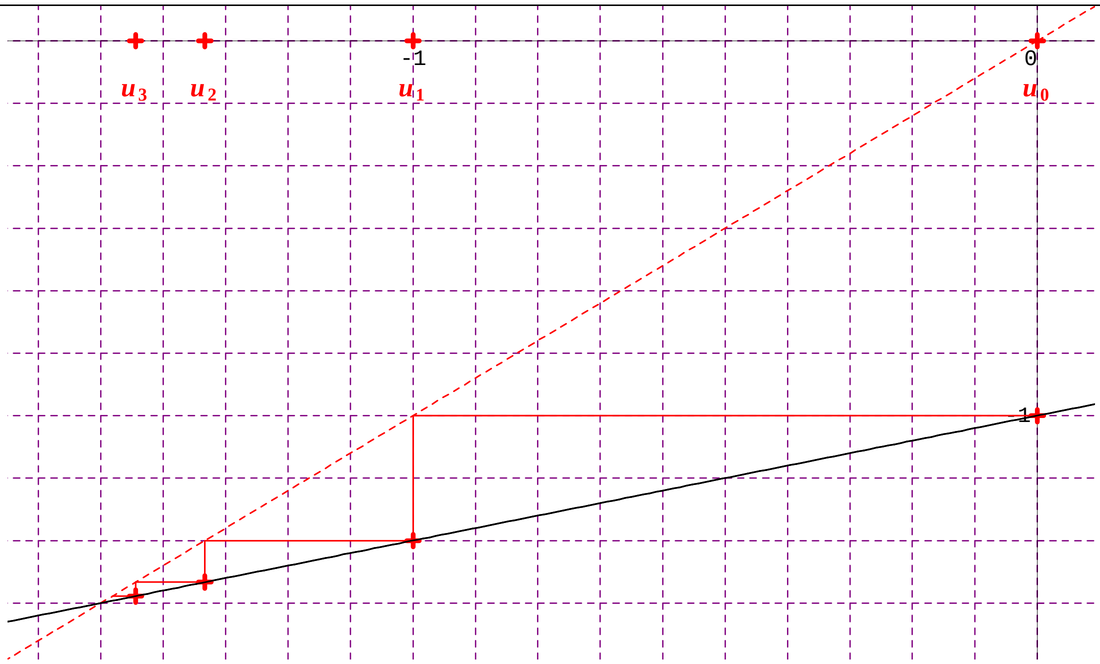
$$u_{n+1} = 2\sqrt{1-\frac{1}{2^{n+1}}} \quad \text{donc } \mathcal{P}(n+1) \text{ est vraie}$$

Par conséquent $u_n = 2\sqrt{1-\frac{1}{2^n}}$ pour tout $n \in \mathbb{N}$

</td>
<td></td>
</tr>
<tr>
<td>Ex2.</td>
<td>2d</td>
<td>

$$\lim_{n\to+\infty}\frac{1}{2^n} = 0 \quad \text{donc} \quad \lim_{n\to+\infty} u_n = 2$$

</td>
<td>0,5</td>
</tr>
<tr>
<td rowspan="2">Exercice 3.</td>
<td>1.</td>
<td>




</td>
<td>2</td>
</tr>
<tr>
<td>2.</td>
<td>

Démontrons par récurrence que $\mathcal{P}(n)$ : $u_n = \frac{1}{2\times 3^{n-1}} - \frac{3}{2}$ est vraie pour tout $n \in \mathbb{N}$.

Initialisation pour $n = 0$ :

$$u_0 = 0 \text{ et } \frac{1}{2\times 3^{-1}} - \frac{3}{2} = \frac{3}{2} - \frac{3}{2} = 0 = u_0 \quad \text{donc } \mathcal{P}(0) \text{ est vraie.}$$

Hérédité : On suppose que $\mathcal{P}(n)$ : $u_n = \frac{1}{2\times 3^{n-1}} - \frac{3}{2}$ est vraie pour $n \in \mathbb{N}$ fixé

$$u_{n+1} = \frac{1}{3}u_n - 1 = \frac{1}{3}\left(\frac{1}{2\times 3^{n-1}} - \frac{3}{2}\right) - 1 = \frac{1}{3}\times\frac{1}{2\times 3^{n-1}} - \frac{1}{3}\times\frac{3}{2} - 1$$

$$u_{n+1} = \frac{1}{2\times 3^n} - \frac{1}{2} - 1 = \frac{1}{2\times 3^n} - \frac{3}{2} \quad \text{donc } \mathcal{P}(n+1) \text{ est vraie}$$

Par conséquent $u_n = \frac{1}{2\times 3^{n-1}} - \frac{3}{2}$ pour tout $n \in \mathbb{N}$

</td>
<td>3</td>
</tr>
</table>

| | | | |
|---|---|---|---|
| | **3.** | $\lim\limits_{n\to+\infty} \dfrac{1}{3^{n-1}} = 0$ donc $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n = -\dfrac{3}{2}$ | **1** |
| | **4.** | $\forall n \in \mathbb{N}, S_n = u_0 + u_1 + u_2 + \cdots + u_n$<br>$S_n = 0 + \left(\dfrac{1}{2\times 3^0} - \dfrac{3}{2}\right) + \left(\dfrac{1}{2\times 3^1} - \dfrac{3}{2}\right) + \left(\dfrac{1}{2\times 3^2} - \dfrac{3}{2}\right) + \cdots$<br>$+ \left(\dfrac{1}{2\times 3^{n-2}} - \dfrac{3}{2}\right) + \left(\dfrac{1}{2\times 3^{n-1}} - \dfrac{3}{2}\right)$<br>$S_n = \underbrace{\dfrac{1}{2\times 3^0} + \dfrac{1}{2\times 3^1} + \dfrac{1}{2\times 3^2} + \cdots + \dfrac{1}{2\times 3^{n-2}} + \dfrac{1}{2\times 3^{n-1}}}_{suite\ géométrique\ de\ raison\ \frac{1}{3}\ et\ de\ 1er\ terme\ 1/2} - \dfrac{3}{2} \times n$<br>$S_n = \frac{1}{2} \times \frac{1-\left(\frac{1}{3}\right)^n}{1-\frac{1}{3}} - \frac{3}{2} \times n = \frac{1}{2} \times \frac{1-\left(\frac{1}{3}\right)^n}{\frac{2}{3}} - \frac{3}{2} \times n$<br>$\lim\limits_{n\to+\infty} \left(\dfrac{1}{3}\right)^n = 0$ et $\lim\limits_{n\to+\infty} -\dfrac{3}{2}n = -\infty$ donc $\lim\limits_{n\to+\infty} S_n = -\infty$ | **1** |

| | DS1 | DS2 |
|---|---|---|
| Moyenne | 12,9 | 12,8 |
| Ecart type | 2,6 | 3,3 |
| Minimum | 6,0 | 6,0 |
| 1er décile | 9,5 | 8,4 |
| 1er quartile | 11,0 | 11,0 |
| Médiane | 13,5 | 13,0 |
| 3e quartile | 15,0 | 15,0 |
| 9e décile | 16,0 | 16,4 |
| Maximum | 16,5 | 18,5 |