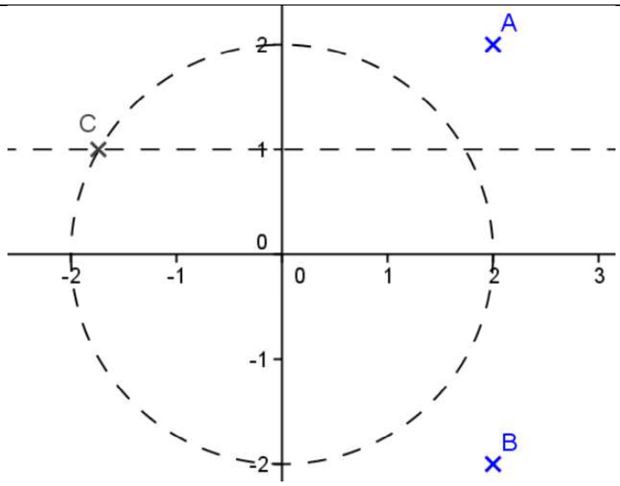
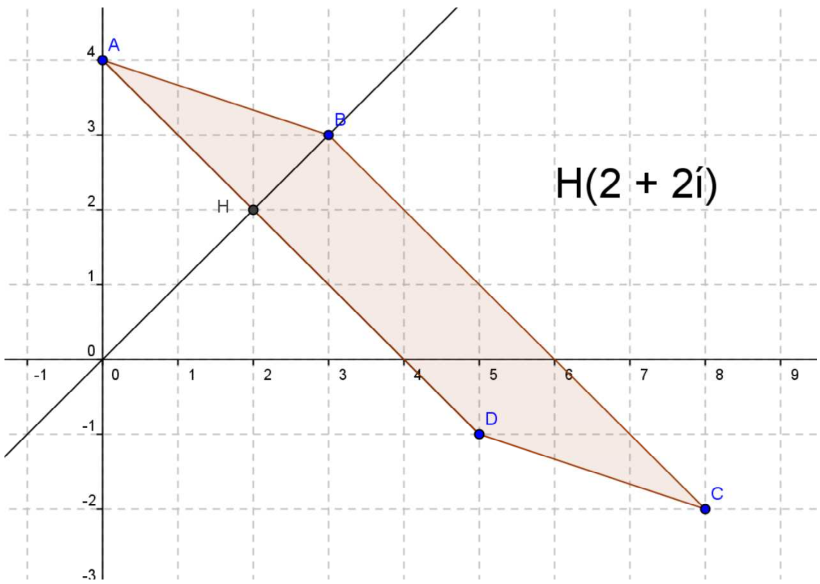
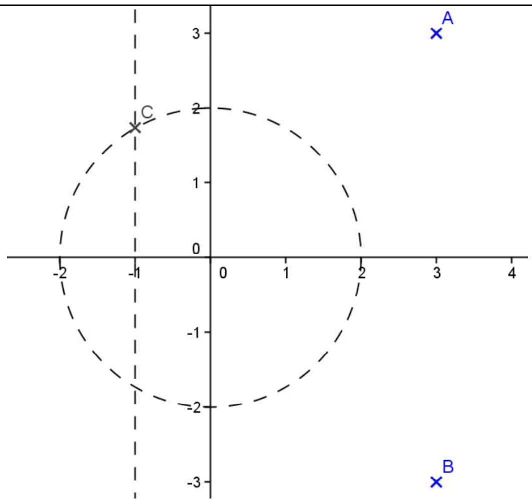
SUJET A

Exercice 1.	**1.**	$$z^2-4z+8=0$$ $\Delta=16-4\times 8=16-32=-16<0$ Il y a donc deux solutions complexes conjuguées : $z_1=\dfrac{4-4i}{2}=\dfrac{2(2-2i)}{2}=2-2i$ et $z_2=2+2i$	1,5
	2.	$z_A=2+2i$ $\lvert z_A\rvert=\lvert 2+2i\rvert=\sqrt{4+4}=\sqrt{8}=2\sqrt{2}$ donc $z_A=2\sqrt{2}\left(\dfrac{2}{2\sqrt{2}}+\dfrac{2i}{2\sqrt{2}}\right)=2\sqrt{2}\left(\dfrac{1}{\sqrt{2}}+\dfrac{i}{\sqrt{2}}\right)$ $z_A=2\sqrt{2}\left(\dfrac{1\times\sqrt{2}}{\sqrt{2}\times\sqrt{2}}+\dfrac{i\times\sqrt{2}}{\sqrt{2}\times\sqrt{2}}\right)=2\sqrt{2}\left(\dfrac{\sqrt{2}}{2}+\dfrac{\sqrt{2}}{2}i\right)$ $z_A=2\sqrt{2}\left(\cos\dfrac{\pi}{4}+\sin\dfrac{\pi}{4}i\right)$ $z_B=\overline{z_A}$ donc $\lvert z_B\rvert=\lvert\overline{z_A}\rvert=\lvert z_A\rvert=2\sqrt{2}$ et $\arg z_B=-\arg z_A=-\dfrac{\pi}{4}\ [2\pi]$ donc $z_B=2\sqrt{2}\left(\cos\left(-\dfrac{\pi}{4}\right)+\sin\left(-\dfrac{\pi}{4}\right)i\right)$ $z_C=-\sqrt{3}+i$ $\lvert z_C\rvert=\lvert-\sqrt{3}+i\rvert=\sqrt{\left(-\sqrt{3}\right)^2+1^2}=\sqrt{3+1}=\sqrt{4}=2$ donc $z_C=2\left(-\dfrac{\sqrt{3}}{2}+\dfrac{1}{2}i\right)=2\left(\cos\left(\dfrac{5\pi}{6}\right)+\sin\left(\dfrac{5\pi}{6}\right)i\right)$	5
			1,5
Exercice 2	**1.**	$$\frac{z+1}{2z-1}=i$$ $$z+1=i(2z-1)$$	2

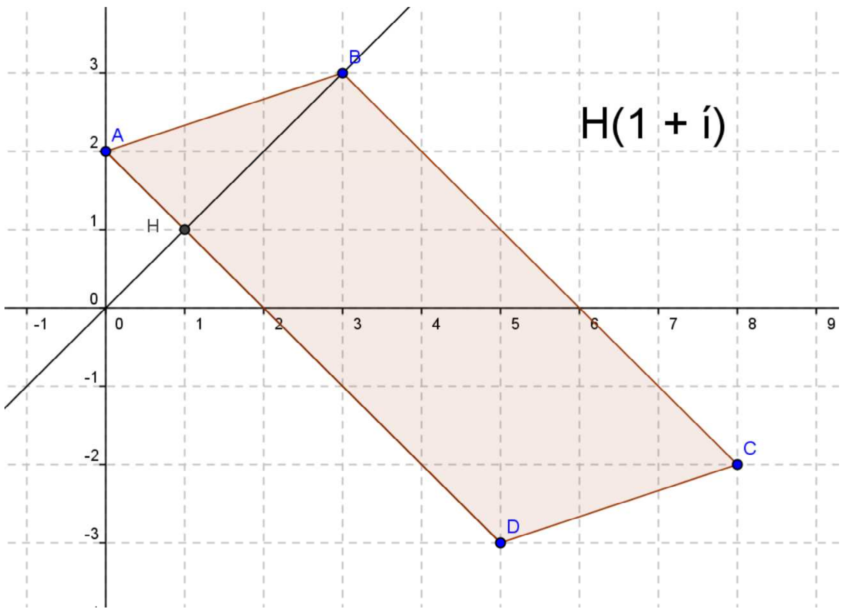
		$z+1=2iz-i$ $z-2iz=-i-1$ $(1-2i)z=-i-1$ $z=\dfrac{-i-1}{1-2i}=\dfrac{(-i-1)(1+2i)}{(1-2i)(1+2i)}=\dfrac{-i-2i^2-1-2i}{1-4i^2}$ $z=\dfrac{-i+2-1-2i}{1+4}=\dfrac{1-3i}{5}$ $\mathcal{S}=\left\{\dfrac{1}{5}-\dfrac{3i}{5}\right\}$	
	2.	Pour tout nombre complexe $z=x+iy$, $(\bar{z})^2=(x-iy)^2=x^2-2ixy+i^2y^2=x^2-y^2-2ixy$ $\overline{(z^2)}=\overline{(x+iy)^2}=\overline{x^2+2ixy+i^2y^2}=\overline{x^2+2ixy-y^2}$ $\overline{(z^2)}=\overline{x^2-y^2+2ixy}=x^2-y^2-2ixy$ donc $\overline{(z^2)}=(\bar{z})^2$	**2**
		1[re] méthode : Pour tout nombre complexe z, $(z-i)(\bar{z}+i)=z\bar{z}+iz-i\bar{z}-i^2$ $=z\bar{z}+i(z-\bar{z})+1$ or $z\bar{z}+1\in\mathbb{R}$ et $z-\bar{z}$ est un imaginaire pur donc $i(z-\bar{z})\in\mathbb{R}$ On en déduit que $(z-i)(\bar{z}+i)\in\mathbb{R}$ 2[e] méthode : Pour tout nombre complexe $z=x+iy$, $(z-i)(\bar{z}+i)=(x+iy-i)(x-iy+i)$ $=x^2-ixy+ix+ixy+i^2y^2+i^2y-ix+i^2y-i^2$ $=x^2-y^2-y-y+1$ $(z-i)(\bar{z}+i)=x^2-y^2-2y+1\in\mathbb{R}$	**2**
Exercice 3.	**1.**	$z_{\overrightarrow{IJ}}=z_J-z_I=\dfrac{z_A+z_C}{2}-\dfrac{z_A+z_B}{2}=\dfrac{z_A+z_C-z_A-z_B}{2}$ $z_{\overrightarrow{IJ}}=\dfrac{z_C-z_B}{2}=\dfrac{z_{\overrightarrow{BC}}}{2}$	**1,5**
	2.	On en déduit que $\overrightarrow{IJ}=\frac{\overrightarrow{BC}}{2}$. Les vecteurs $\overrightarrow{IJ}$ et $\overrightarrow{BC}$ sont colinéaires donc les droites (IJ) et (BC) sont parallèles. On a $\overrightarrow{IJ}=\frac{\overrightarrow{BC}}{2}$ donc $IJ=\frac{BC}{2}$.	**1,5**
Exercice 4	**1.**	$ABCD$ est un parallélogramme si, et seulement si, $\overrightarrow{AD}=\overrightarrow{BC}$ $\overrightarrow{AD}=\overrightarrow{BC}\Leftrightarrow z_D-z_A=z_C-z_B$ $\Leftrightarrow z_D-4i=8-2i-(3+3i)$	**2**

		$\Leftrightarrow z_D = 8 - 2i - 3 - 3i + 4i = 5 - i$	
	2.	Posons $z_H = x_H + iy_H$ c'est-à-dire $H(x_H ; y_H)$. $\overrightarrow{BH}\begin{pmatrix} x_H - 3 \\ y_H - 3 \end{pmatrix} \perp \overrightarrow{AD}\begin{pmatrix} 5 - 0 \\ -1 - 4 \end{pmatrix} \Leftrightarrow 5(x_H - 3) - 5(y_H - 3) = 0$ $\Leftrightarrow 5x_H - 15 - 5y_H + 15 = 0 \Leftrightarrow x_H = y_H$ donc $z_H = x_H + ix_H$	
Exercice 4.		D'autre part, H appartient au segment $[AD]$ donc les vecteurs $\overrightarrow{AH}$ et $\overrightarrow{AD}$ sont colinéaires et donc $\overrightarrow{AH} = t \times \overrightarrow{AD}$ où $t \in \mathbb{R}$ $z_{\overrightarrow{AD}} = z_D - z_A = 5 - i - 4i = 5 - 5i$ $z_{\overrightarrow{AH}} = x_H + ix_H - 4i = x_H + (x_H - 4)i$ or $z_{\overrightarrow{AH}} = t \times z_{\overrightarrow{AD}}$ donc $x_H + (x_H - 4)i = t \times (5 - 5i) = 5t - 5ti$ et donc $\begin{cases} x_H = 5t \\ x_H - 4 = -5t \end{cases} \Leftrightarrow 5t - 4 = -5t \Leftrightarrow 10t = 4 \Leftrightarrow t = \frac{4}{10} = 0{,}4$ On en déduire que $x_H = y_H = 5 \times 0{,}4 = 2$ donc $z_H = 2 + 2i$  	1

SUJET B

Exercice 1.	**1.**	$$z^2 - 6z + 18 = 0$$ $\Delta = 36 - 4 \times 18 = 36 - 72 = -36 < 0$ Il y a donc deux solutions complexes conjuguées : $z_1 = \dfrac{6-6i}{2} = \dfrac{2(3-3i)}{2} = 3 - 3i$ et $z_2 = 3 + 3i$	**1,5**
	2.	$z_A = 3 + 3i$ $\lvert z_A \rvert = \lvert 3+3i \rvert = \sqrt{9+9} = \sqrt{18} = 3\sqrt{2}$ donc $z_A = 3\sqrt{2}\left(\dfrac{3}{3\sqrt{2}} + \dfrac{3i}{3\sqrt{2}}\right) = 3\sqrt{2}\left(\dfrac{1}{\sqrt{2}} + \dfrac{i}{\sqrt{2}}\right)$ $z_A = 3\sqrt{2}\left(\dfrac{1\times\sqrt{2}}{\sqrt{2}\times\sqrt{2}} + \dfrac{i\times\sqrt{2}}{\sqrt{2}\times\sqrt{2}}\right) = 3\sqrt{2}\left(\dfrac{\sqrt{2}}{2} + \dfrac{\sqrt{2}}{2}i\right)$ $z_A = 3\sqrt{2}\left(\cos\dfrac{\pi}{4} + \sin\dfrac{\pi}{4}i\right)$ $z_B = \overline{z_A}$ donc $\lvert z_B \rvert = \lvert \overline{z_A} \rvert = \lvert z_A \rvert = 3\sqrt{2}$ et $\arg z_B = -\arg z_A = -\dfrac{\pi}{4}\ [2\pi]$ donc $z_B = 3\sqrt{2}\left(\cos\left(-\dfrac{\pi}{4}\right) + \sin\left(-\dfrac{\pi}{4}\right)i\right)$ $z_C = -1 + i\sqrt{3}$ $\lvert z_C \rvert = \lvert -1 + i\sqrt{3} \rvert = \sqrt{(-1)^2 + \sqrt{3}^2} = \sqrt{1+3} = \sqrt{4} = 2$ donc $z_C = 2\left(-\dfrac{1}{2} + \dfrac{\sqrt{3}}{2}i\right) = 2\left(\cos\left(\dfrac{5\pi}{6}\right) + \sin\left(\dfrac{5\pi}{6}\right)i\right)$	**5**
		 	**1,5**

Exercice 2.	**1.**	$\dfrac{z-1}{2z+1} = i$ $z-1 = i(2z+1)$ $z-1 = 2iz+i$ $z-2iz = 1+i$ $(1-2i)z = 1+i$ $z = \dfrac{1+i}{1-2i} = \dfrac{(1+i)(1+2i)}{(1-2i)(1+2i)} = \dfrac{1+2i+i+2i^2}{1-4i^2}$ $z = \dfrac{1+2i+i-2}{1+4} = \dfrac{-1+3i}{5}$ $\mathcal{S} = \left\{\dfrac{-1}{5} + \dfrac{3i}{5}\right\}$	**2**
	2.	Pour tout nombre complexe $z = x+iy$, $(\bar{z})^2 = (x-iy)^2 = x^2-2ixy+i^2y^2 = x^2-y^2-2ixy$ $\overline{(z^2)} = \overline{(x+iy)^2} = \overline{x^2+2ixy+i^2y^2} = \overline{x^2+2ixy-y^2}$ $\overline{(z^2)} = \overline{x^2-y^2+2ixy} = x^2-y^2-2ixy$ donc $\overline{(z^2)} = (\bar{z})^2$	**2**
	2.	1re méthode : Pour tout nombre complexe z, $(z+i)(\bar{z}-i) = z\bar{z} - iz + i\bar{z} - i^2$ $= z\bar{z} - i(z-\bar{z}) + 1$ or $z\bar{z}+1 \in \mathbb{R}$ et $z-\bar{z}$ est un imaginaire pur donc $-i(z-\bar{z}) \in \mathbb{R}$ On en déduit que $(z+i)(\bar{z}-i) \in \mathbb{R}$ 2e méthode : Pour tout nombre complexe $z = x+iy$, $(z+i)(\bar{z}-i) = (x+iy+i)(x-iy-i)$ $= x^2 - ixy - ix + ixy - i^2y^2 - i^2y + ix - i^2y - i^2$ $= x^2+y^2+y+y+1$ $(z+i)(\bar{z}-i) = x^2+y^2+2y+1 \in \mathbb{R}$	**2**
Exercice 3.	**1.**	$z_{\overrightarrow{IJ}} = z_J - z_I = \dfrac{z_A+z_C}{2} - \dfrac{z_A+z_B}{2} = \dfrac{z_A+z_C-z_A-z_B}{2}$ $z_{\overrightarrow{IJ}} = \dfrac{z_C-z_B}{2} = \dfrac{z_{\overrightarrow{BC}}}{2}$	**1,5**
	2.	On en déduit que $\overrightarrow{IJ} = \frac{\overrightarrow{BC}}{2}$. Les vecteurs $\overrightarrow{IJ}$ et $\overrightarrow{BC}$ sont colinéaires donc les droites (IJ) et (BC) sont parallèles. On a $\overrightarrow{IJ} = \frac{\overrightarrow{BC}}{2}$ donc $IJ = \frac{BC}{2}$.	**1,5**

Exercice 4.	**1.**	$ABCD$ est un parallélogramme si, et seulement si, $\overrightarrow{AD}=\overrightarrow{BC}$ $\overrightarrow{AD}=\overrightarrow{BC} \Leftrightarrow z_D - z_A = z_C - z_B$ $\Leftrightarrow z_D - 2i = 8-2i-(3+3i)$ $\Leftrightarrow z_D = 8-2i-3-3i+2i = 5-3i$	2
	2.	Posons $z_H = x_H + iy_H$ c'est-à-dire $H(x_H;y_H)$. $\overrightarrow{BH}\begin{pmatrix}x_H-3\\y_H-3\end{pmatrix} \perp \overrightarrow{AD}\begin{pmatrix}5-0\\-3-2\end{pmatrix} \Leftrightarrow 5(x_H-3)-5(y_H-3)=0$ $\Leftrightarrow 5x_H - 15 - 5y_H + 15 = 0 \Leftrightarrow x_H = y_H$ donc $z_H = x_H + ix_H$	
Exercice 4.		D'autre part, H appartient au segment $[AD]$ donc les vecteurs $\overrightarrow{AH}$ et $\overrightarrow{AD}$ sont colinéaires et donc $\overrightarrow{AH} = t\times\overrightarrow{AD}$ où $t\in\mathbb{R}$ $z_{\overrightarrow{AD}} = z_D - z_A = 5-3i-2i = 5-5i$ $z_{\overrightarrow{AH}} = x_H + ix_H - 2i = x_H + (x_H-2)i$ or $z_{\overrightarrow{AH}} = t\times z_{\overrightarrow{AD}}$ donc $x_H + (x_H-2)i = t\times(5-5i) = 5t-5ti$ et donc $\begin{cases} x_H = 5t \\ x_H - 2 = -5t\end{cases} \Leftrightarrow 5t-2=-5t \Leftrightarrow 10t = 2 \Leftrightarrow t = \frac{2}{10} = 0{,}2$ On en déduire que $x_H = y_H = 5\times 0{,}2 = 1$ donc $z_H = 1+i$ 	1

	DS1	DS2	DS3
Moyenne	12,9	12,8	12,7
Ecart type	2,6	3,3	4,4
Minimum	6,0	6,0	5,0
1er décile	9,5	8,4	6,5
1er quartile	11,0	11,0	9,0
Médiane	13,5	13,0	13,0
3e quartile	15,0	15,0	16,3
9e décile	16,0	16,4	17,5
Maximum	16,5	18,5	19,5