EXERCICE 1. (3 points)

On considère la fonction $f(x) = (7-4x)^5$, définie sur $\mathbb{R}$.

▶1. Déterminer les limites de la fonction f aux bornes de son ensemble de définition.

▶2. Démontrer que la fonction f est monotone.

EXERCICE 2. (7 points)

Soit la fonction h définie par $h(x) = \dfrac{\sqrt{x^2+9}-3}{x^2}$ pour $x \neq 0$ et $h(0) = \dfrac{1}{6}$.

▶1. Démontrer que pour tout $x \neq 0, h(x) = \dfrac{1}{\sqrt{x^2+9}+3}$.

▶2. Etudier, en justifiant, la continuité de la fonction h.

▶3. Etudier la limite de $h(x)$ en $-\infty$ et en $+\infty$. La fonction h admet-elle une asymptote ?

▶4. Démontrer que pour tout $x \neq 0, h'(x) = \dfrac{-x}{\sqrt{x^2+9}\left(\sqrt{x^2+9}+3\right)^2}$.

En déduire le tableau de variations de h.

▶5. Déterminer une équation de la tangente en 4 à la courbe de h.

EXERCICE 3. (6 points)

On étudie la fonction $g(x) = x\sin x + \cos x$ définie sur $[0;\pi]$.

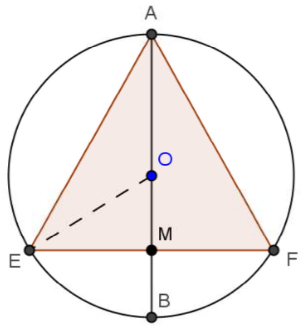
▶1a) Pour tout $x \in [0;\pi]$, calculer $g'(x)$.

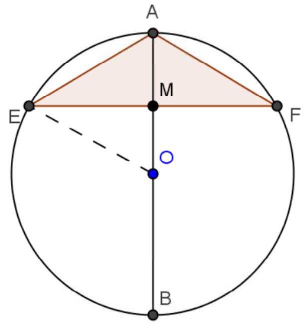
b) Etudier le signe de $g'(x)$ sur $[0;\pi]$, en déduire le tableau de variations de la fonction g.

▶2. Démontrer que l'équation $g(x) = 0$ admet une unique solution notée α sur $[0;\pi]$.

Donner une valeur approchée de α à 0,01 près.

EXERCICE 4. (4 points)





On considère le cercle de centre O et de diamètre $[AB]$ où $AB = 12$ cm. Le point M est un point mobile sur le diamètre $[AB]$ et on pose $AM = x$ où $x \in [0;12]$. La perpendiculaire au segment $[AB]$ passant par M coupe le cercle en deux point E et F. Pour tout $x \in [0;12]$, notons $f(x)$ l'aire du triangle AEF.

▶1. Démontrer que $f(x) = x\sqrt{12x-x^2}$ cm², pour tout $x \in [0;12]$.

▶2. Existe-t-il une position de M qui donne une aire maximale ? Si oui, combien vaut cette aire maximale et quelle est la nature du triangle dans ce cas là ?

EXERCICE 1. (3 points)

On considère la fonction $f(x) = (5-3x)^7$, définie sur $\mathbb{R}$.

▶1. Déterminer les limites de la fonction f aux bornes de son ensemble de définition.

▶2. Démontrer que la fonction f est monotone.

EXERCICE 2. (7 points)

Soit la fonction h définie par $h(x) = \dfrac{\sqrt{x^2+16}-4}{x^2}$ pour $x \neq 0$ et $h(0) = \dfrac{1}{8}$.

▶1. Démontrer que pour tout $x \neq 0, h(x) = \dfrac{1}{\sqrt{x^2+16}+4}$.

▶2. Etudier, en justifiant, la continuité de la fonction h.

▶3. Etudier la limite de $h(x)$ en $-\infty$ et en $+\infty$. La fonction h admet-elle une asymptote ?

▶4. Démontrer que pour tout $x \neq 0, h'(x) = \dfrac{-x}{\sqrt{x^2+16}\left(\sqrt{x^2+16}+4\right)^2}$.

En déduire le tableau de variations de h.

▶5. Déterminer une équation de la tangente en 3 à la courbe de h.

EXERCICE 3. (6 points)

On étudie la fonction $g(x) = \sin x - x\cos x$ définie sur $\left[-\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2}\right]$.

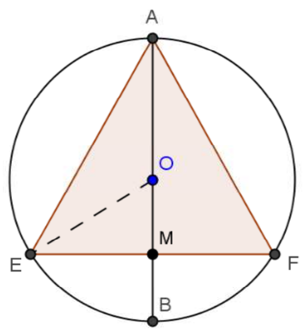
▶1a) Pour tout $x \in \left[-\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2}\right]$, calculer $g'(x)$.

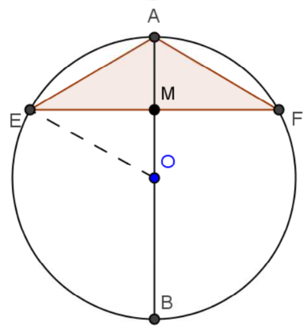
b) Etudier le signe de $g'(x)$ sur $\left[-\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2}\right]$, en déduire le tableau de variations de g.

▶2. Démontrer que l'équation $g(x) = 0{,}5$ admet une unique solution notée α sur $\left[-\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2}\right]$. Donner une valeur approchée de α à 0,01 près.

EXERCICE 4. (4 points)

On considère le cercle de centre O et de diamètre $[AB]$ où $AB = 10$ cm. Le point M est un point mobile sur le diamètre $[AB]$ et on pose $AM = x$ où $x \in [0; 10]$. La perpendiculaire au segment $[AB]$ passant par M coupe le cercle en deux point E et F. Pour tout $x \in [0; 10]$, notons $f(x)$ l'aire du triangle AEF.





▶1. Démontrer que $f(x) = x\sqrt{10x - x^2}$ cm², pour tout $x \in [0; 10]$.

▶2. Existe-t-il une position de M qui donne une aire maximale ? Si oui, combien vaut cette aire maximale et quelle est la nature du triangle dans ce cas là ?