gaelle.buffet@ac-montpellier.fr - http://gaellebuffet.free.fr/

TS - correction du contrôle n°4

Sujet A

<table>
<tr><td rowspan="2">Exercice 1.</td><td>1.</td><td>$\lim\limits_{x\to-\infty}(7-4x)=+\infty$ donc $\lim\limits_{x\to-\infty}(7-4x)^5=+\infty$
$\lim\limits_{x\to+\infty}(7-4x)=-\infty$ donc $\lim\limits_{x\to+\infty}(7-4x)^5=-\infty$</td><td>1</td></tr>
<tr><td>2.</td><td>$\forall x\in\mathbb{R},\ f'(x)=5\times(7-4x)^4\times(-4)=(-20)\times(7-4x)^4$
$-20<0$ et $(7-4x)^4>0$, pour tout x donc $f'(x)<0, \forall x\in\mathbb{R}$
La fonction f est donc monotone puisqu'elle est strictement décroissante sur $\mathbb{R}$.</td><td>2</td></tr>
<tr><td rowspan="4">Exercice 2.</td><td>1.</td><td>$\forall x>0,\ h(x)=\dfrac{\left(\sqrt{x^2+9}-3\right)\left(\sqrt{x^2+9}+3\right)}{x^2\left(\sqrt{x^2+9}+3\right)}$
$h(x)=\dfrac{x^2+9-9}{x^2\left(\sqrt{x^2+9}+3\right)}=\dfrac{x^2}{x^2\left(\sqrt{x^2+9}+3\right)}=\dfrac{1}{\sqrt{x^2+9}+3}$</td><td>1</td></tr>
<tr><td>2.</td><td>$\lim\limits_{x\to0^+}h(x)=\lim\limits_{x\to0^-}h(x)=\lim\limits_{x\to0}\dfrac{1}{\sqrt{x^2+9}+3}=\dfrac{1}{\sqrt{9}+3}=\dfrac{1}{6}=h(0)$
La fonction h est donc continue en 0, elle est alors continue sur $\mathbb{R}$.</td><td>1,5</td></tr>
<tr><td>3.</td><td>$\lim\limits_{x\to+\infty}\sqrt{x^2+9}+3=\lim\limits_{x\to-\infty}\sqrt{x^2+9}+3=+\infty$
donc $\lim\limits_{x\to+\infty}h(x)=\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{1}{\sqrt{x^2+9}+3}=0=\lim\limits_{x\to-\infty}h(x)$
La courbe de h admet une asymptote horizontale d'équation $y=0$ en $\pm\infty$.</td><td>1,5</td></tr>
<tr><td>4.</td><td>$\forall x>0,\quad \begin{array}{l}u=1\\ v=\sqrt{x^2+9}+3\end{array}\quad \begin{array}{l}u'=0\\ v'=\dfrac{2x}{2\sqrt{x^2+9}}=\dfrac{x}{\sqrt{x^2+9}}\end{array}$
$h'(x)=\dfrac{0-\dfrac{x}{\sqrt{x^2+9}}}{\left(\sqrt{x^2+9}+3\right)^2}=\dfrac{-x}{\sqrt{x^2+9}}\times\dfrac{1}{\left(\sqrt{x^2+9}+3\right)^2}$
$h'(x)=\dfrac{-x}{\sqrt{x^2+9}\left(\sqrt{x^2+9}+3\right)^2}$
donc $h'(x)<0\Leftrightarrow x>0$
<table><tr><td>x</td><td>$-\infty$</td><td></td><td>0</td><td></td><td>$+\infty$</td></tr><tr><td>$h'(x)$</td><td></td><td>$+$</td><td>0</td><td>$-$</td><td></td></tr><tr><td>$h(x)$</td><td>0</td><td>$\nearrow$</td><td>$1/6$</td><td>$\searrow$</td><td>0</td></tr></table></td><td>2</td></tr>
</table>

5.

Une équation de la tangente en 4 à la courbe de h est :

$$y = h'(4)(x-4) + h(4)$$

$$h'(4) = \frac{-4}{\sqrt{16+9}\left(\sqrt{16+9}+3\right)^2} = \frac{-4}{5(5+3)^2} = \frac{-4}{5\times 8\times 8} = \frac{-1}{80}$$

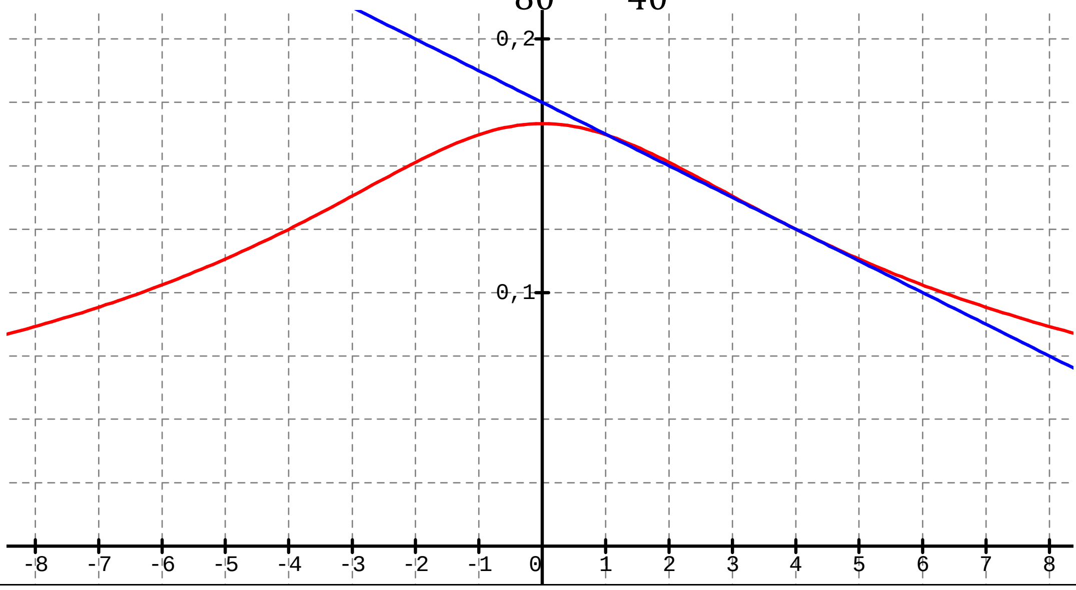
$$h(4) = \frac{1}{\sqrt{16+9}+3} = \frac{1}{5+3} = \frac{1}{8}$$

donc

$$y = -\frac{1}{80}(x-4) + \frac{1}{8}$$

$$y = -\frac{1}{80}x + \frac{4}{80} + \frac{1}{8} = -\frac{1}{80}x + \frac{14}{80}$$

$$y = -\frac{1}{80}x + \frac{7}{40}$$



1

Exercice n°3

1.

Pour tout $x \in [0;\pi]$, $g(x) = x\sin x + \cos x$

$$g'(x) = 1\times\sin x + x\times\cos x - \sin x = x\cos x$$

1,5

$$g'(x) > 0 \Leftrightarrow \cos x > 0 \text{ car } 0 < x < \pi$$

$$\Leftrightarrow 0 < x < \frac{\pi}{2}$$

x	0		$\frac{\pi}{2}$		π
$g'(x)$		$+$	0	$-$	
$g(x)$	1	$\nearrow$	$\frac{\pi}{2}$	$\searrow$	-1

$$g\left(\frac{\pi}{2}\right) = \frac{\pi}{2}\sin\frac{\pi}{2} + \cos\frac{\pi}{2} = \frac{\pi}{2}$$

2

Exercice n°3 — **2.** — 2,5

$$g\left(\frac{\pi}{2}\right)=\frac{\pi}{2}>0 \quad \text{et} \quad g(\pi)=-1<0$$

La fonction g étant continue, l'équation $g(x)=0$ admet au moins une solution sur l'intervalle $\left[\frac{\pi}{2};\pi\right]$. De plus, la fonction g étant stictement monotone, la solution notée α est unique sur l'intervalle $\left[\frac{\pi}{2};\pi\right]$.
D'autre part, sur l'intervalle $\left[0;\frac{\pi}{2}\right]$, la fonction a 1 pour minimum donc $g(x)=0$ n'a pas de solution sur $\left[0;\frac{\pi}{2}\right]$.
α est donc l'unique solution de $g(x)=0$ sur l'intervalle $[0;\pi]$

En utilisant, sur la calculatrice, les touches TABLE et DefTable :

X	Y1	
2.4	.88372	
2.5	.69504	
2.6	.48341	
2.7	.24985	
2.8	-.0043	
2.9	-.2771	
3	-.5666	

Y1=-.00425552023

On en déduit que : $2{,}7<\alpha<2{,}8$

X	Y1	
2.75	.12527	
2.76	.09975	
2.77	.07404	
2.78	.04813	
2.79	.02203	
2.8	-.0043	
2.81	-.0307	

Y1=.02203269377

On en déduit que : $2{,}79<\alpha<2{,}80$

X	Y1	
2.795	.00891	
2.796	.00628	
2.797	.00365	
2.798	.00102	
2.799	-.0016	
2.8	-.0043	
2.801	-.0069	

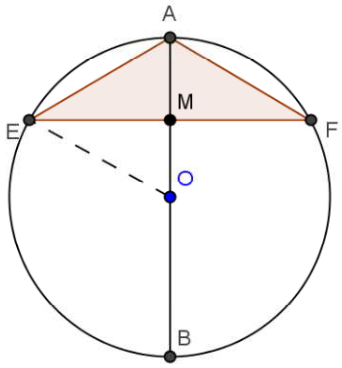
Y1=.00101716187б

On en déduit que : $2{,}798<\alpha<2{,}799$

On peut donc conclure que $\alpha\approx 2{,}80$.

Exercice n°4

1. (1)



Le triangle AEF a pour base EF et pour hauteur $AM = x$. Son aire est donc égale à

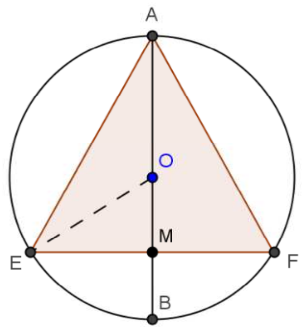
$$f(x) = \frac{EF \times AM}{2} = \frac{2 \times EM \times x}{2}$$

Lorsque $0 \leq x \leq 6$,
D'après Pythagore,

$$\begin{aligned} EM^2 = OE^2 - OM^2 &= 6^2 - (6-x)^2 \\ &= 36 - (36 - 12x + x^2) \\ &= 36 - 36 + 12x - x^2 = 12x - x^2 \end{aligned}$$

Lorsque $6 \leq x \leq 12$,
D'après Pythagore,

$$\begin{aligned} EM^2 = OE^2 - OM^2 &= 6^2 - (x-6)^2 \\ &= 36 - (x^2 - 12x + 36) \\ &= 36 - x^2 + 12x - 36 = 12x - x^2 \end{aligned}$$



Par conséquent, pour tout $x \in [0; 12]$

$$f(x) = \frac{2 \times \sqrt{12x - x^2} \times x}{2} = x\sqrt{12x - x^2}$$

2. (3)

Pour tout $x \in [0; 12]$

$$u = x \qquad u' = 1$$

$$v = \sqrt{12x - x^2} \qquad v' = \frac{12 - 2x}{2\sqrt{12x - x^2}} = \frac{6 - x}{\sqrt{12x - x^2}}$$

$$\begin{aligned} f'(x) = 1 \times \sqrt{12x - x^2} + x \times \frac{6-x}{\sqrt{12x - x^2}} &= \frac{12x - x^2}{\sqrt{12x - x^2}} + \frac{6x - x^2}{\sqrt{12x - x^2}} \\ &= \frac{18x - 2x^2}{\sqrt{12x - x^2}} = \frac{2x(9-x)}{\sqrt{12x - x^2}} \end{aligned}$$

$f'(x) \geq 0 \Leftrightarrow 2x(9-x) \geq 0$ car $\sqrt{12x - x^2} > 0$

x	$-\infty$		0		9		$+\infty$
Signe de $2x(9-x)$		$-$	0	$+$	0	$-$	

On en déduit le tableau de variations de f :

x	0		9		12
$f'(x)$		$+$	0	$-$	
$f(x)$	0	$\nearrow$	$27\sqrt{3}$	$\searrow$	0

L'aire sera alors maximale pour $x = AM = 9$ cm.
L'aire maximale sera alors égale à :

$$f(9) = 9\sqrt{27} = 9\sqrt{9 \times 3} = 9 \times 3\sqrt{3} = 27\sqrt{3} \text{ cm}^2$$

Dans ce cas là $EM = \sqrt{12 \times 9 - 9^2} = \sqrt{27} = 3\sqrt{3}$
et donc $EF = 2 \times EM = 6\sqrt{3}$
D'après Pythagore, $AE^2 = 9^2 + \left(3\sqrt{3}\right)^2 = 81 + 9 \times 3 = 108$
Donc $AE = AF = \sqrt{108} = 6\sqrt{3} = EF$
Le triangle AEF est donc équilatéral.

Sujet B

Exercice 1.	**1.**	$\lim\limits_{x\to-\infty}(5-3x)=+\infty$ donc $\lim\limits_{x\to-\infty}(5-3x)^7=+\infty$ $\lim\limits_{x\to+\infty}(5-3x)=-\infty$ donc $\lim\limits_{x\to+\infty}(5-3x)^7=-\infty$	**1**
	2.	$\forall x\in\mathbb{R},\ \ f'(x)=7\times(5-3x)^6\times(-3)=(-21)\times(5-3x)^6$ $-21<0$ et $(5-3x)^6>0$, pour tout x donc $f'(x)<0, \forall x\in\mathbb{R}$ La fonction f est donc monotone puisqu'elle est strictement décroissante sur $\mathbb{R}$.	**2**
Exercice 2.	**1.**	$\forall x>0,\ \ h(x)=\dfrac{\left(\sqrt{x^2+16}-4\right)\left(\sqrt{x^2+16}+4\right)}{x^2\left(\sqrt{x^2+16}+4\right)}$ $h(x)=\dfrac{x^2+16-16}{x^2\left(\sqrt{x^2+16}+4\right)}=\dfrac{x^2}{x^2\left(\sqrt{x^2+16}+4\right)}=\dfrac{1}{\sqrt{x^2+16}+4}$	**1**
	2.	$\lim\limits_{x\to0^+}h(x)=\lim\limits_{x\to0^-}h(x)=\lim\limits_{x\to0}\dfrac{1}{\sqrt{x^2+16}+4}=\dfrac{1}{\sqrt{16}+4}=\dfrac{1}{8}=h(0)$ La fonction h est donc continue en 0, elle est alors continue sur $\mathbb{R}$.	**1,5**
	3.	$\lim\limits_{x\to+\infty}\sqrt{x^2+16}+4=\lim\limits_{x\to-\infty}\sqrt{x^2+16}+4=+\infty$ donc $\lim\limits_{x\to+\infty}h(x)=\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{1}{\sqrt{x^2+16}+4}=0=\lim\limits_{x\to-\infty}h(x)$ La courbe de h admet une asymptote horizontale d'équation $y=0$ en $\pm\infty$.	**1,5**
	4.	$\forall x>0,\quad \begin{matrix} u=1 \\ v=\sqrt{x^2+16}+4\end{matrix}\quad \begin{matrix} u'=0 \\ v'=\dfrac{2x}{2\sqrt{x^2+16}}=\dfrac{x}{\sqrt{x^2+16}}\end{matrix}$ $h'(x)=\dfrac{0-\dfrac{x}{\sqrt{x^2+16}}}{\left(\sqrt{x^2+16}+4\right)^2}=\dfrac{-x}{\sqrt{x^2+16}}\times\dfrac{1}{\left(\sqrt{x^2+16}+4\right)^2}$ $h'(x)=\dfrac{-x}{\sqrt{x^2+16}\left(\sqrt{x^2+16}+4\right)^2}$ donc $h'(x)<0\Leftrightarrow x>0$	**2**

x	$-\infty$		0		$+\infty$
$h'(x)$		$+$	0	$-$	
$h(x)$	0	$\nearrow$	$1/8$	$\searrow$	0

5.

Une équation de la tangente en 3 à la courbe de h est :

$$y = h'(3)(x-3) + h(3)$$

$$h'(3) = \frac{-3}{\sqrt{9+16}\left(\sqrt{9+16}+4\right)^2} = \frac{-3}{5(5+4)^2} = \frac{-1}{135}$$

$$h(4) = \frac{1}{\sqrt{9+16}+4} = \frac{1}{5+4} = \frac{1}{9}$$

donc

$$y = -\frac{1}{135}(x-3) + \frac{1}{9}$$

$$y = -\frac{1}{135}x + \frac{3}{135} + \frac{1}{9} = -\frac{1}{135}x + \frac{6}{45}$$

$$y = -\frac{1}{135}x + \frac{2}{15}$$

1

Exercice n°2

1.

Pour tout $x \in \left[-\frac{\pi}{2};\frac{\pi}{2}\right]$, $g(x) = \sin x - x\cos x$

$$g'(x) = \cos x - 1 \times \cos x - x \times (-\sin x) = \cos x - \cos x + x\sin x$$
$$= x\sin x$$

1,5

x	$-\pi/2$		0		$\pi/2$
x		$-$	0	$+$	
$\sin x$		$-$	0	$+$	
$g'(x)$		$+$	0	$+$	
$g(x)$	-1	$\nearrow$			1

$g\left(-\frac{\pi}{2}\right) = \sin\left(-\frac{\pi}{2}\right) + \frac{\pi}{2}\cos\left(-\frac{\pi}{2}\right) = -1$

$g\left(\frac{\pi}{2}\right) = \sin\left(\frac{\pi}{2}\right) - \frac{\pi}{2}\cos\left(\frac{\pi}{2}\right) = 1$

2

Exercice n°3

2.

$$g\left(-\frac{\pi}{2}\right) = -1 < 0{,}5 \quad \text{et} \quad g\left(\frac{\pi}{2}\right) = 1 > 0{,}5$$

La fonction g étant continue, l'équation $g(x) = 0{,}5$ admet au moins une solution sur l'intervalle $\left[-\frac{\pi}{2};\frac{\pi}{2}\right]$. De plus, la fonction g étant stictement monotone, la solution notée α est unique sur l'intervalle $\left[-\frac{\pi}{2};\frac{\pi}{2}\right]$.

α est donc l'unique solution de $g(x) = 0{,}5$ sur l'intervalle $\left[-\frac{\pi}{2};\frac{\pi}{2}\right]$

En utilisant, sur la calculatrice, les touches TABLE et DefTable :

X	Y1
1	.30117
1.1	.39225
1.2	.49721
1.3	.61581
1.4	.7475
1.5	.89139
1.6	1.0463

Y1=.497209780595

On en déduit que : $1{,}2 < \alpha < 1{,}3$

X	Y1
1.19	.48609
1.2	.49721
1.21	.50846
1.22	.51985
1.23	.53138
1.24	.54304
1.25	.55483

Y1=.497209780595

On en déduit que : $1{,}20 < \alpha < 1{,}21$

X	Y1
1.2	.49721
1.201	.49833
1.202	.49945
1.203	.50057
1.204	.50169
1.205	.50282
1.206	.50395

Y1=.499449407611

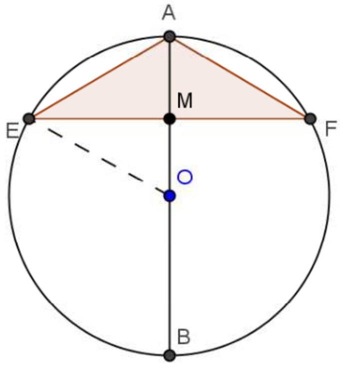
On en déduit que : $1{,}202 < \alpha < 1{,}203$

On peut donc conclure que $\alpha \approx 1{,}20$.

2,5

Exercice n°4

1. (1)



Le triangle AEF a pour base EF et pour hauteur $AM = x$. Son aire est donc égale à

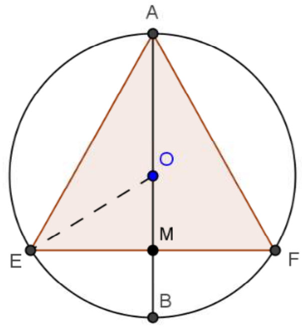
$$f(x) = \frac{EF \times AM}{2} = \frac{2 \times EM \times x}{2}$$

Lorsque $0 \leq x \leq 5$,
D'après Pythagore,

$$EM^2 = OE^2 - OM^2 = 5^2 - (5-x)^2$$
$$= 25 - (25 - 10x + x^2)$$
$$= 25 - 25 + 10x - x^2 = 10x - x^2$$

Lorsque $5 \leq x \leq 10$,
D'après Pythagore,

$$EM^2 = OE^2 - OM^2 = 5^2 - (x-5)^2$$
$$= 25 - (x^2 - 10x + 25)$$
$$= 25 - x^2 + 10x - 25 = 10x - x^2$$



Par conséquent, pour tout $x \in [0;10]$

$$f(x) = \frac{2 \times \sqrt{10x - x^2} \times x}{2} = x\sqrt{10x - x^2}$$

2. (3)

Pour tout $x \in [0;10]$ $\quad u = x \quad u' = 1$

$$v = \sqrt{10x - x^2} \quad v' = \frac{10-2x}{2\sqrt{10x-x^2}} = \frac{5-x}{\sqrt{10x-x^2}}$$

$$f'(x) = 1 \times \sqrt{10x - x^2} + x \times \frac{5-x}{\sqrt{10x-x^2}} = \frac{10x - x^2}{\sqrt{10x-x^2}} + \frac{5x - x^2}{\sqrt{10x-x^2}}$$
$$= \frac{15x - 2x^2}{\sqrt{10x-x^2}} = \frac{x(15-2x)}{\sqrt{10x-x^2}}$$

$f'(x) \geq 0 \Leftrightarrow x(15-2x) \geq 0$ car $\sqrt{10x - x^2} > 0$

x	$-\infty$		0		$7{,}5$		$+\infty$
Signe de $x(15-2x)$		$-$	0	$+$	0	$-$	

On en déduit le tableau de variations de f :

x	0		$7{,}5$		10
$f'(x)$		$+$	0	$-$	
$f(x)$	0	$\nearrow$	$75\sqrt{3}/4$	$\searrow$	0

L'aire sera alors maximale pour $x = AM = 7{,}5$ cm.
L'aire maximale sera alors égale à :

$$f(7{,}5) = 7{,}5\sqrt{18{,}75} = \frac{15}{2}\sqrt{\frac{1875}{100}} = \frac{15}{20} \times 25\sqrt{3} = \frac{75}{4}\sqrt{3}\text{ cm}^2$$

Dans ce cas là $EM = \sqrt{10 \times 7{,}5 - 7{,}5^2} = \sqrt{18{,}75} = \sqrt{\frac{1875}{100}} = \frac{5\sqrt{3}}{2}$

et donc $EF = 2 \times EM = 5\sqrt{3}$

D'après Pythagore, $AE^2 = 7{,}5^2 + \left(\frac{5\sqrt{3}}{2}\right)^2 = 56{,}25 + \frac{25\times 3}{4} = 75$

Donc $AE = AF = \sqrt{75} = 5\sqrt{3} = EF$
Le triangle AEF est donc équilatéral.