Exercice 1.	**1.**	$\left.\begin{array}{r}\lim\limits_{n\to+\infty} 5n = +\infty \\ \lim\limits_{n\to+\infty} -3n^3 - 7 = -\infty\end{array}\right\}$ alors par addition, la forme est indéterminée $\forall n \in \mathbb{N}^*,\ u_n = n^3\left(\frac{5}{n^2} - 3 - \frac{7}{n^3}\right)$ $\left.\begin{array}{r}\lim\limits_{n\to+\infty} n^3 = +\infty \\ \lim\limits_{n\to+\infty} \frac{5}{n^2} - 3 - \frac{7}{n^3} = -3\end{array}\right\}$ alors par produit $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n = -\infty$	2
	2.	$\left.\begin{array}{r}\lim\limits_{n\to+\infty} -5\sqrt{n+1} = -\infty \\ \lim\limits_{n\to+\infty} -n^2 = -\infty\end{array}\right\}$ alors par addition, $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n = -\infty$	1
	3.	$\left.\begin{array}{r}\lim\limits_{n\to+\infty} \sqrt{n+1} = +\infty \\ \lim\limits_{n\to+\infty} \sqrt{n} = +\infty\end{array}\right\}$ alors par soustraction, la forme est indéterminée $\forall n \in \mathbb{N},\ u_n = \sqrt{n+1} - \sqrt{n} = \frac{\left(\sqrt{n+1} - \sqrt{n}\right)\left(\sqrt{n+1} + \sqrt{n}\right)}{\sqrt{n+1} + \sqrt{n}}$ $u_n = \frac{n+1-n}{\sqrt{n+1} + \sqrt{n}} = \frac{1}{\sqrt{n+1} + \sqrt{n}}$ $\lim\limits_{n\to+\infty} \sqrt{n+1} + \sqrt{n} = +\infty$ alors $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n = 0$	2
	4.	$\left.\begin{array}{r}\lim\limits_{n\to+\infty} 6n^2 - 1 = +\infty \\ \lim\limits_{n\to+\infty} 2n^2 + 5 = +\infty\end{array}\right\}$ alors par quotient, la forme est indéterminée $\forall n \in \mathbb{N}^*,\ u_n = \frac{6n^2 - 1}{2n^2 + 5} = \frac{n^2\left(6 - \frac{1}{n^2}\right)}{n^2\left(2 + \frac{5}{n^2}\right)} = \frac{6 - \frac{1}{n^2}}{2 + \frac{5}{n^2}}$ $\left.\begin{array}{r}\lim\limits_{n\to+\infty} 6 - \frac{1}{n^2} = 6 \\ \lim\limits_{n\to+\infty} 2 + \frac{5}{n^2} = 2\end{array}\right\}$ alors par produit $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n = \frac{6}{2} = 3$	2

Exercice 2.	1.	Soit $A < 0$, $u_n = 3 - 4\sqrt{n} < A$ $\Leftrightarrow -4\sqrt{n} < A - 3$ $\Leftrightarrow \sqrt{n} > \frac{A-3}{-4} \geq 0$ $\Rightarrow n > \left(\frac{3-A}{4}\right)^2$ car $x \mapsto x^2$ est croissante sur $[0; +\infty[$ posons $N = \text{Ent}\left(\left(\frac{3-A}{4}\right)^2\right) + 1$, $\forall\, n \in \mathbb{N}$ avec $n > N > \left(\frac{3-A}{4}\right)^2$ donc $u_n < A$ On en déduit que $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n = -\infty$	1,5
	2.	Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, $-1 \leq \sin(n) \leq 1$ $\Leftrightarrow -\frac{1}{n^2} \leq \frac{\sin(n)}{n^2} \leq \frac{1}{n^2}$ $\Leftrightarrow -\frac{1}{n^2} \leq -\frac{\sin(n)}{n^2} \leq \frac{1}{n^2}$ $\Leftrightarrow 2 - \frac{1}{n^2} \leq v_n \leq 2 + \frac{1}{n^2}$	1
		or $\lim\limits_{n\to+\infty} 2 - \frac{1}{n^2} = \lim\limits_{n\to+\infty} 2 + \frac{1}{n^2} = 2$ donc $\lim\limits_{n\to+\infty} v_n = 2$	1
	3.	L'affirmation est fausse. Prenons pour suites (u_n) et (v_n) les suites définies par, pour tout $n \in \mathbb{N}, u_n = -2n$ donc $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n = -\infty$ pour tout $n \in \mathbb{N}, v_n = 3n$ donc $\lim\limits_{n\to+\infty} v_n = +\infty$ $\forall n \in \mathbb{N},\ u_n + v_n = -2n + 3n = n$ donc $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n + v_n = +\infty \neq 0$	1,5
Exercice 3	1.	$u_1 = \frac{1}{3}u_0 + 3 = 3$ $u_2 = \frac{1}{3}u_1 + 3 = 1 + 3 = 4$ $u_3 = \frac{1}{3}u_2 + 3 = \frac{4}{3} + 3 = \frac{13}{3}$	1

Exercice 3.	2.	Démontrons par récurrence que $\mathcal{P}(n) : u_n \leq u_{n+1} \leq 5$ est vraie pour tout $n \in \mathbb{N}$. Initialisation pour $n = 0$: $u_0 = 0$ et $u_1 = 3$ et $u_0 \leq u_1 \leq 5$ donc $\mathcal{P}(0)$ est vraie. Hérédité : On suppose que $\mathcal{P}(n) : u_n \leq u_{n+1} \leq 5$ est vraie pour $n \in \mathbb{N}$ fixé $u_n \leq u_{n+1} \leq 5$ $\Leftrightarrow \frac{1}{3}u_n \leq \frac{1}{3}u_{n+1} \leq \frac{5}{3}$ $\Leftrightarrow \frac{1}{3}u_n + 3 \leq \frac{1}{3}u_{n+1} + 3 \leq \frac{5}{3} + 3$ $\Leftrightarrow u_{n+1} \leq u_{n+2} \leq \frac{14}{3} \leq 5$ donc $\mathcal{P}(n+1)$ est vraie Par conséquent : $u_n \leq u_{n+1} \leq 5$ pour tout $n \in \mathbb{N}$	2
		On en déduit que la suite (u_n) est croissante et majorée, elle est donc convergente.	1
	3.	$\forall n \in \mathbb{N}, \frac{v_{n+1}}{v_n} = \frac{u_{n+1} - 4{,}5}{u_n - 4{,}5} = \frac{\left(\frac{1}{3}u_n + 3\right) - 4{,}5}{u_n - 4{,}5} = \frac{\frac{1}{3}u_n - 1{,}5}{u_n - 4{,}5}$ $= \frac{\frac{1}{3}(u_n - 4{,}5)}{u_n - 4{,}5} = \frac{1}{3}$ (v_n) est donc géométrique de raison $\frac{1}{3}$ et de 1er terme $v_0 = -4{,}5$.	1,5
		$\forall n \in \mathbb{N},\ v_n = v_0 \times q^n = -4{,}5 \times \left(\frac{1}{3}\right)^n = -\frac{4{,}5}{3^n} = u_n - 4{,}5$ et donc $\forall n \in \mathbb{N},\ u_n = 4{,}5 - \frac{4{,}5}{3^n}$	1
		$\lim\limits_{n\to+\infty} 3^n = +\infty$ car $3 > 1$, donc $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n = 4{,}5$	0,5
	4.	$\sum_{k=0}^{n} u_k = u_0 + u_1 + \cdots + u_{n-1} + u_n$ $= v_0 + 4{,}5 + v_1 + 4{,}5 + \cdots + v_n + 4{,}5$ $= v_0 \times \frac{1 - \left(\frac{1}{3}\right)^{n+1}}{1 - \frac{1}{3}} + (n+1) \times 4{,}5$ $= \frac{3}{2}(-4{,}5)\left[1 - \left(\frac{1}{3}\right)^{n+1}\right] + (n+1) \times 4{,}5$ $\lim\limits_{n\to+\infty} \left(\frac{1}{3}\right)^{n+1} = 0$ donc $\lim\limits_{n\to+\infty} \sum_{k=0}^{n} u_k = +\infty$	1