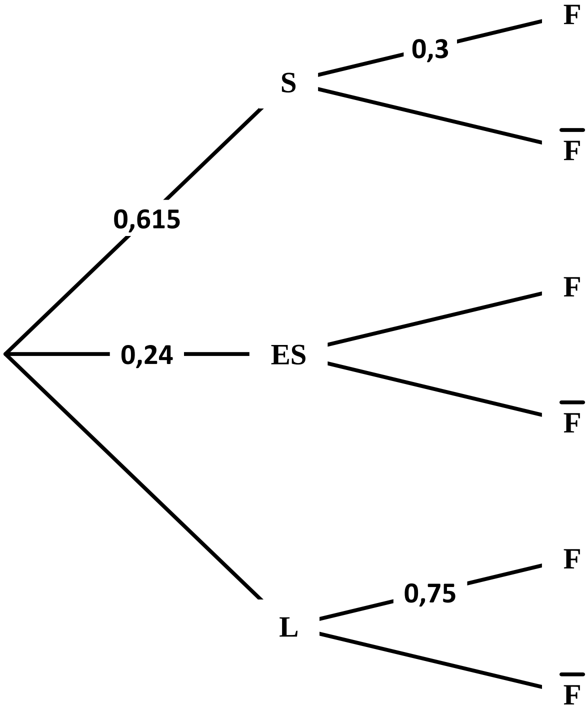
Exercice 1.	1.	$P(S)=0{,}615 \quad P(ES)=0{,}24 \quad P_L(F)=\frac{3}{4}=0{,}75$ $P_S(F)=0{,}3$ et $P(F)=0{,}427$ 	2
	2.	$P(L)=1-(0{,}615+0{,}24)=0{,}145$ donc $P(L\cap F)=0{,}145\times 0{,}75=0{,}10875$	1
		$P(S\cap F)=0{,}615\times 0{,}3=0{,}1845$	1
		$P(F)=0{,}427=P(S\cap F)+P(ES\cap F)+P(L\cap F)$ donc $P(ES\cap F)=0{,}427-(0{,}1845+0{,}10875)=0{,}13375$	2
	3.	$P_{ES}(F)=\dfrac{P(ES\cap F)}{P(ES)}=\dfrac{0{,}13375}{0{,}24}=\dfrac{107}{192}\approx 0{,}557$	1
	4.	$P_F(L)=\dfrac{P(L\cap F)}{P(F)}=\dfrac{0{,}10875}{0{,}427}=\dfrac{435}{1708}\approx 0{,}255$	1
Exercice 2.	A1	$\left.\begin{array}{r}\lim\limits_{x\to-\infty}(1-x)=+\infty\\ \lim\limits_{x\to-\infty}e^x=0\end{array}\right\}$ FI par produit $g(x)=(1-x)e^x=e^x-xe^x$ or $\lim\limits_{x\to-\infty}xe^x=0$ donc $\lim\limits_{x\to-\infty}g(x)=0$ $\left.\begin{array}{r}\lim\limits_{x\to+\infty}(1-x)=-\infty\\ \lim\limits_{x\to+\infty}e^x=+\infty\end{array}\right\}$ par produit donc $\lim\limits_{x\to+\infty}g(x)=-\infty$	2
	A2	$\forall x\in\mathbb{R},\quad u=1-x \quad u'=-1$ $v=e^x \quad v'=e^x$ $g'(x)=u'v+uv'=-e^x+(1-x)e^x=(-1+1-x)e^x=-xe^x$ $\forall x\in\mathbb{R},\quad e^x>0$ donc $g'(x)>0 \Leftrightarrow x<0$	1

x	$-\infty$		0		$+\infty$
$g'(x)$		$+$	0	$-$	
$g(x)$	0	$\nearrow$	1	$\searrow$	$-\infty$

1

A3

$$g(1) = (1-1)e^1 = 0$$

On en déduit que :

x	$-\infty$		1		$+\infty$
$g(x)$		$+$	0	$-$	

1

B1

$$\left.\begin{array}{r}\lim\limits_{x\to-\infty} e^x = 0 \\ \lim\limits_{x\to-\infty} e^x - x = +\infty\end{array}\right\} \text{ par quotient}$$

$$\text{donc } \lim_{x\to-\infty} f(x) = 0$$

1

$$\left.\begin{array}{r}\lim\limits_{x\to+\infty} e^x = +\infty \\ \lim\limits_{x\to+\infty} -x = -\infty\end{array}\right\} FI \text{ par somme}$$

$$\forall x \in \mathbb{R},\quad f(x) = \frac{e^x}{e^x - x} = \frac{e^x}{e^x\left(1 - \frac{x}{e^x}\right)} = \frac{1}{1 - \frac{x}{e^x}}$$

$$\text{or } \lim_{x\to+\infty} \frac{e^x}{x} = +\infty \text{ donc } \lim_{x\to+\infty} \frac{x}{e^x} = 0$$

$$\text{donc } \lim_{x\to+\infty} f(x) = 1$$

1,5

$\lim\limits_{x\to-\infty} f(x) = 0$ donc $y = 0$ est asymptote horiontale en $-\infty$.
$\lim\limits_{x\to+\infty} f(x) = 1$ donc $y = 1$ est asymptote horiontale en $+\infty$.

1

B2

$$\forall x \in \mathbb{R}, f(x) = \frac{e^x}{e^x - x} = \frac{u}{v}$$

$$\begin{array}{ll} u = e^x & u' = e^x \\ v = e^x - x & v' = e^x - 1 \end{array}$$

$$f'(x) = \frac{u'v - uv'}{v^2} = \frac{e^x(e^x - x) - e^x(e^x - 1)}{(e^x - x)^2}$$

$$f'(x) = \frac{e^{2x} - xe^x - e^{2x} + e^x}{(e^x - x)^2}$$

$$f'(x) = \frac{-xe^x + e^x}{(e^x - x)^2} = \frac{(-x+1)e^x}{(e^x - x)^2}$$

$$f'(x) = \frac{g(x)}{(e^x - x)^2}$$

1,5

$\forall x \in \mathbb{R}, (e^x - x)^2 \geq 0$

x	$-\infty$		1		$+\infty$
$f'(x)$		$+$	0	$-$	
$f(x)$	0	$\nearrow$	$\frac{e}{e-1}$	$\searrow$	1

$$f(1) = \frac{e^1}{e^1 - 1} = \frac{e}{e-1}$$

1

C

Résolvons l'équation :

$$y = \frac{1}{2}x + 1 = f(x)$$

$$\frac{1}{2}x + 1 = \frac{e^x}{e^x - x}$$

$$\left(\frac{1}{2}x + 1\right)(e^x - x) = e^x$$

$$e^x = \frac{1}{2}xe^x - \frac{1}{2}x^2 + e^x - x$$

$$0 = \frac{1}{2}xe^x - \frac{1}{2}x^2 - x$$

$$0 = xe^x - x^2 - 2x$$

$$0 = x(e^x - x - 2)$$

On obtient alors soit $x = 0$, soit $e^x - x - 2 = 0$

Posons $h(x) = e^x - x - 2, \forall x \in \mathbb{R}$

$\forall x \in \mathbb{R}, h'(x) = e^x - 1$

$$h'(x) > 0 \Leftrightarrow e^x - 1 > 0$$
$$\Leftrightarrow e^x > 1 = e^0$$
$$\Leftrightarrow x > 0$$

x	$-\infty$		0		$+\infty$
$h'(x)$		$-$	0	$+$	
$h(x)$		$\searrow$	1	$\nearrow$	

$$h(0) = e^0 - 0 - 2 = 1 - 2 = -1 < 0$$

$$h(-2) = e^{-2} + 2 - 2 = \frac{1}{e^2} > 0$$

$$h(2) = e^2 - 2 - 2 = e^2 - 4 \approx 3 > 0$$

h est dérivable sur $\mathbb{R}$ donc continue sur $\mathbb{R}$. h est strictement décroissante sur $\mathbb{R}^-$ et strictement croissante $\mathbb{R}^+$.
D'après le théorème des valeurs intermédiaires, $e^x - x - 2 = 0$ admet donc exactement deux solutions. L'une notée α dans l'intervalle $]-2; 0[$ et l'autre notée β dans l'intervalle $]0; 2[$.

Finalement, l'équation $\frac{1}{2}x + 1 = f(x)$ admet trois solutions : $0, \alpha$ et β.

1