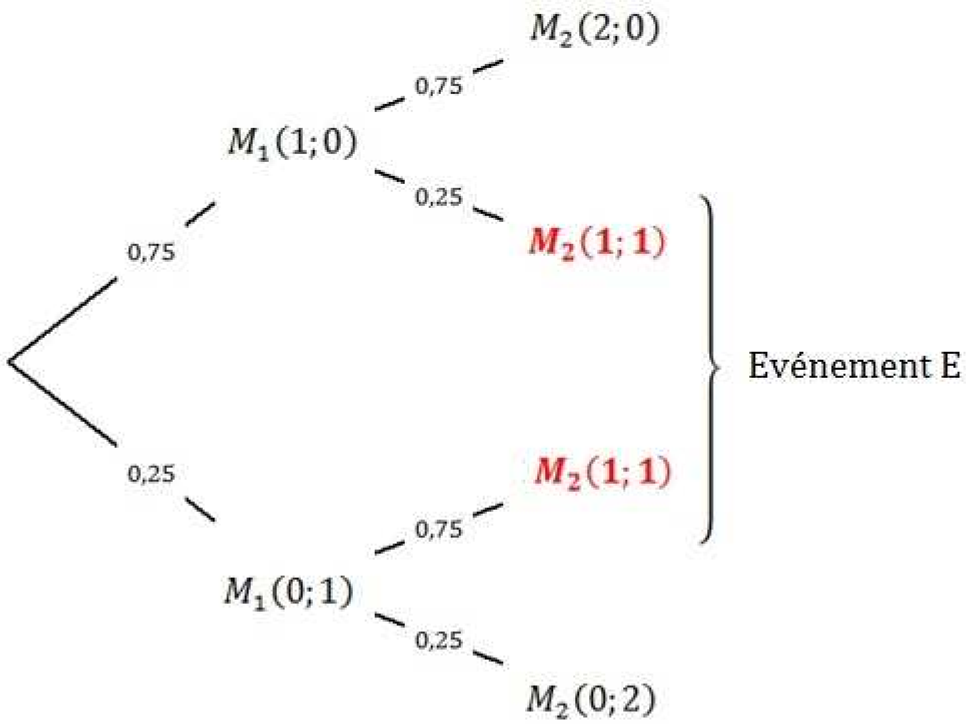
Exercice 1. Partie 1

1.

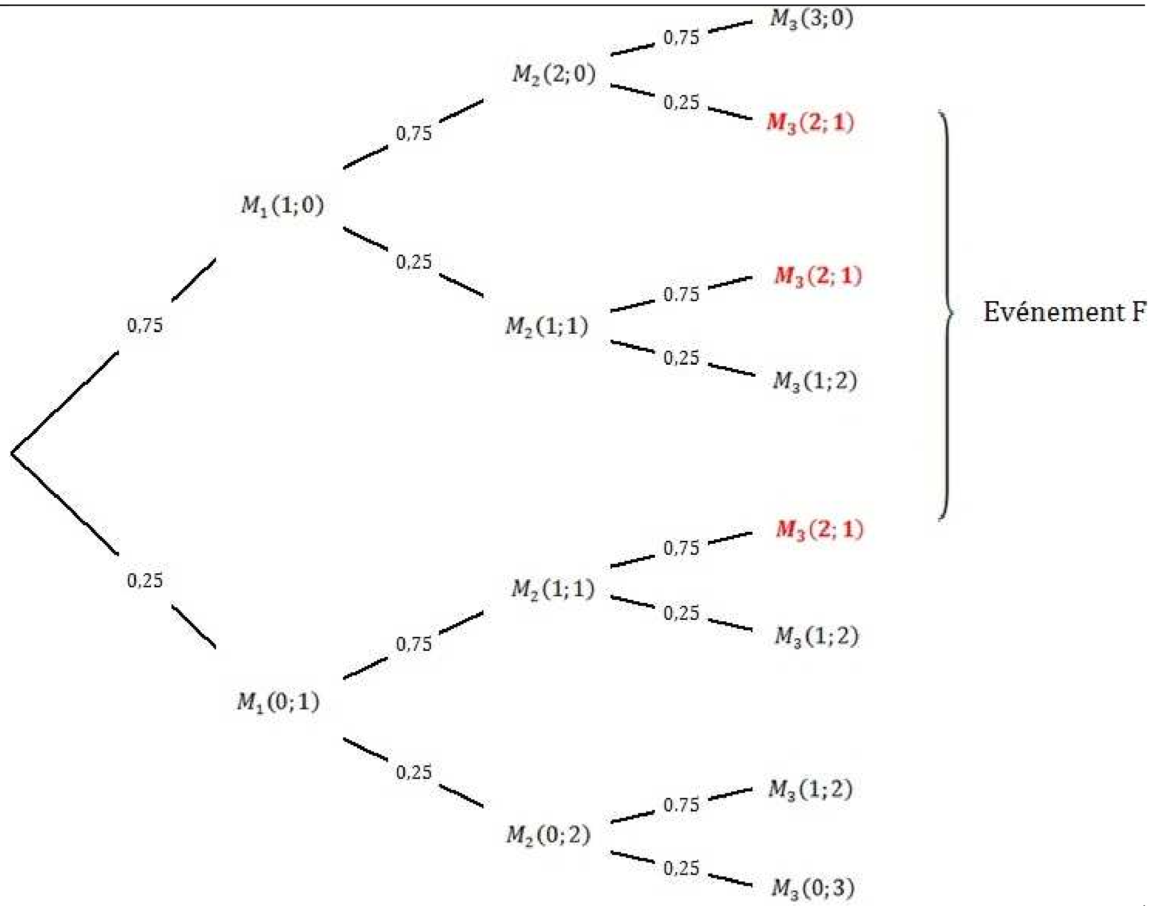
	initialisation			
Valeurs de K		1	2	3
Valeurs de X	**0**	**1**	**2**	**2**
Valeurs de Y	**0**	**0**	**0**	**1**
Valeurs de $ALEA$		0,3456	0,546	0,245

On obtient alors le point $M_3(2;1)$

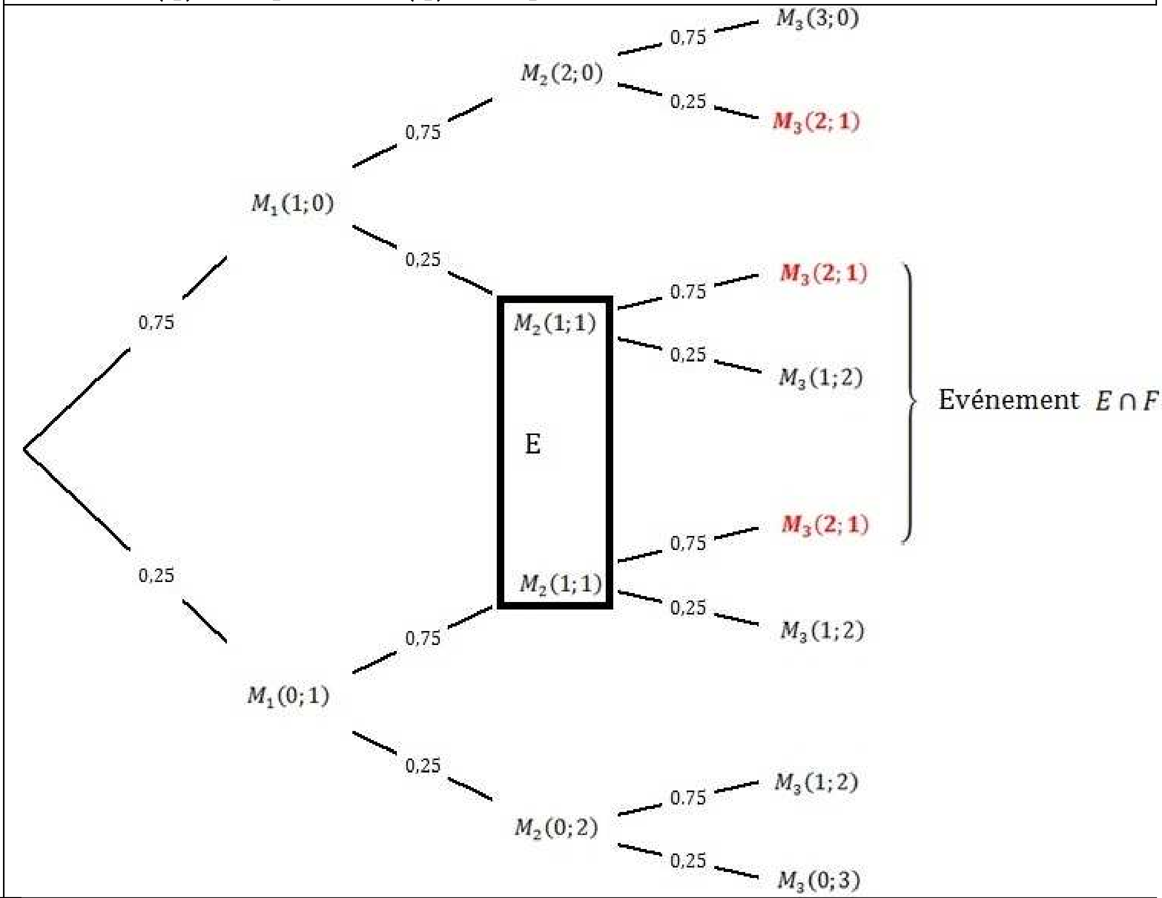
2.

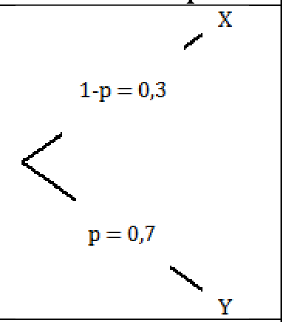


$$P(E) = 0{,}75 \times 0{,}25 \times 2 = \frac{3}{4} \times \frac{1}{4} \times 2 = \frac{6}{16} = \frac{3}{8}$$



$$P(F) = \left(\frac{3}{4}\right)^2 \times \frac{1}{4} \times 3 = \left(\frac{3}{4}\right)^3 = \frac{3^3}{4^3}$$



		$P(E\cap F)=\left(\frac{3}{4}\right)^2\times\frac{1}{4}\times 2=\frac{9\times 2}{4^3}=\frac{9}{32}$
		On en déduit que $P_F(E)=\frac{P(E\cap F)}{P(F)}=\frac{9/32}{3^3/4^3}=\frac{9}{32}\times\frac{4^3}{3^3}=\frac{2}{3}$
	3.	$P_F(E)=\frac{2}{3}$ et $P(E)=\frac{3}{8}$ donc $P_F(E)\neq P(E)$ Les événements E et F ne sont donc pas indépendants. Par conséquent, les événements E et $\bar{F}$ ne sont pas indépendants non plus.
Exercice 1. Partie 2	**1.**	On répète 60 fois, de façon identique et indépendante, le schéma de Bernoulli ci-contre :  Donc, Y_{60}, la variable aléatoire, qui compte le nombre de déplacements en ordonnée, suit une loi binomiale $\mathcal{B}(60;0{,}7)$.
		Tous les points $M_{60}(X_{60};Y_{60})$ vérifient $X_{60}+Y_{60}=60$ pour 60 déplacements en tout, donc les points appartiennent à $y=60-x$.
	2.	$P(G)=P(35\leq Y_{60}\leq 49)=P(Y_{60}\leq 49)-P(Y_{60}<35)$ $P(G)=P(Y_{60}\leq 49)-P(Y_{60}\leq 34)\approx 0{,}98612215-0{,}01957429$ $P(G)\approx 0{,}96654786\approx 0{,}967$ à 0,001 près
		Pour le point d'arrivée $M_{60}(35;25)$, on a $Y_{60}=25$. or $P(G)\approx 0{,}967$ mais $Y_{60}=25\notin G$ $Y_{60}=25\in\bar{G}$ et $P(\bar{G})\approx 0{,}033$ Le professeur a donc raison d'affirmer qu'il est quasiment sûr que cette simulation est fausse.
Exercice 2.	**1.**	$\lvert z-2+i\rvert=2$ $\Leftrightarrow \lvert z-(2-i)\rvert=2$ $\Leftrightarrow \lvert z_M-z_C\rvert=2$ $\Leftrightarrow CM=2$ **L'affirmation 1 est donc fausse** ; l'ensemble des points M d'affixe z vérifiant $\lvert z-2+i\rvert=2$ est le cercle de centre C et de rayon 2.
	2.	$j=1\times e^{\frac{2i\pi}{3}}=e^{\frac{2i\pi}{3}}$ donc $j^2=\left(e^{\frac{2i\pi}{3}}\right)^2=e^{2\times\frac{2i\pi}{3}}=e^{\frac{4i\pi}{3}}=e^{\frac{-2i\pi}{3}}=e^{\overline{\frac{2i\pi}{3}}}=\bar{j}$ or $j=e^{\frac{2i\pi}{3}}=\cos\left(\frac{2\pi}{3}\right)+i\sin\left(\frac{2\pi}{3}\right)=-\frac{1}{2}+i\frac{\sqrt{3}}{2}$ donc $j^2=-\frac{1}{2}-i\frac{\sqrt{3}}{2}$ $1+j+j^2=1-\frac{1}{2}+i\frac{\sqrt{3}}{2}-\frac{1}{2}-i\frac{\sqrt{3}}{2}$ $1+j+j^2=1-\frac{1}{2}-\frac{1}{2}=0$ **L'affirmation 2 est vraie.**

<table>
<tr><td rowspan="2">Exercice 2.</td><td>3.</td><td>

$\left|\sqrt{3}+i\right| = \sqrt{\left(\sqrt{3}^2+1^2\right)} = \sqrt{3+1} = \sqrt{4} = 2$

$\sqrt{3}+i = 2\left(\frac{\sqrt{3}}{2}+\frac{1}{2}i\right) = 2\left(\cos\left(\frac{\pi}{6}\right)+i\sin\left(\frac{\pi}{6}\right)\right) = 2e^{\frac{i\pi}{6}}$

$\left(\sqrt{3}+i\right)^{2016} = \left(2e^{\frac{i\pi}{6}}\right)^{2016} = 2^{2016}\times\left(e^{\frac{i\pi}{6}}\right)^{2016} = 2^{2016}\times e^{2016\times\frac{i\pi}{6}}$

$\left(\sqrt{3}+i\right)^{2016} = 2^{2016}\times e^{336i\pi} = 2^{2016}(\cos(336\pi)+i\sin(336\pi))$

$\left(\sqrt{3}+i\right)^{2016} = 2^{2016}(1+i\times 0) = 2^{2016}$

L'affirmation 3 est donc vraie.</td></tr>
<tr><td>4.</td><td>

$$z-\bar{z}+2-4i=0$$
$$\Leftrightarrow x+iy-(x-iy)+2-4i=0$$
$$\Leftrightarrow x+iy-x+iy+2-4i=0$$
$$\Leftrightarrow 2+i(2y-4)=0$$

Deux nombres complexes sont égaux si, et seulement si, ils ont même partie imaginaire et même partie réelle. L'équation ci-dessus n'a pas de solution car les deux parties réelles sont différentes pour tous x et y.

L'affirmation 4 est donc fausse.</td></tr>
<tr><td rowspan="2">Exercice 3. Partie 1.</td><td>1.</td><td>

$$\lim_{t\to+\infty} e^{-0,04t} = 0 \text{ donc } \lim_{t\to+\infty} 1+be^{-0,04t} = 1$$
$$\text{et donc } \lim_{t\to+\infty} h(t) = \frac{a}{1} = a$$</td></tr>
<tr><td>2.</td><td>

La limite maximale de la hauteur du bambou est de 2 m donc

$$\lim_{t\to+\infty} h(t) = \mathbf{2 = a}$$

De plus, initialement la hauteur du bambou est de 0,1 m donc

$$h(0) = 0,1 = \frac{a}{1+be^{-0,04\times 0}} = \frac{2}{1+b}$$
$$\Leftrightarrow 0,1(1+b) = 2$$
$$\Leftrightarrow 0,1+0,1b = 2$$
$$\Leftrightarrow 0,1b = 2-0,1 = 1,9$$
$$\Leftrightarrow b = \frac{1,9}{0,1} = 19$$</td></tr>
<tr><td>Exercice 3. Partie 2.</td><td>1.</td><td>

$$\forall t\in[0;250],\quad f(t) = \frac{2}{1+19e^{-0,04t}} = \frac{u}{v}$$

$u = 2$ $u' = 0$

$v = 1+19\underbrace{e^{-0,04t}}_{\substack{e^u \\ \text{où } u=-0,04t}}$ $v' = 0+19\times\underbrace{\left(-0,04\times e^{-0,04t}\right)}_{\substack{u'\times e^u \\ \text{où } u'=-0,04}} = -0,76e^{-0,04t}$

$f'(t) = \frac{u'v-uv'}{v^2} = \frac{-2\times\left(-0,76e^{-0,04t}\right)}{\left(1+19e^{-0,04t}\right)^2} = \frac{1,52e^{-0,04t}}{\left(1+19e^{-0,04t}\right)^2}$

Vérifions $f'(0) = \frac{1,52e^0}{(1+19e^0)^2} = \frac{1,52}{20^2} = 0,0038$</td></tr>
</table>

Exercice 3. Partie 2.

$\forall t \in [0;250]$, $(1+19e^{-0,04t})^2 > 0$ et $1,52e^{-0,04t} > 0$

donc $f'(t) = \dfrac{1,52e^{-0,04t}}{(1+19e^{-0,04t})^2} > 0$

La fonction f est donc strictement croissante sur $[0;250]$.

2.

On souhaite résoudre : $f(t) = 1,5$

$$\Leftrightarrow \frac{2}{1+19e^{-0,04t}} = 1,5$$
$$\Leftrightarrow 2 = 1,5(1+19e^{-0,04t})$$
$$\Leftrightarrow 2 = 1,5 + 28,5e^{-0,04t}$$
$$\Leftrightarrow 2 - 1,5 = 28,5e^{-0,04t}$$
$$\Leftrightarrow 28,5e^{-0,04t} = 0,5$$
$$\Leftrightarrow e^{-0,04t} = \frac{0,5}{28,5} = \frac{5}{285} = \frac{1}{57}$$

D'après la capture d'écran $-0,04t \approx -4,04305126783$

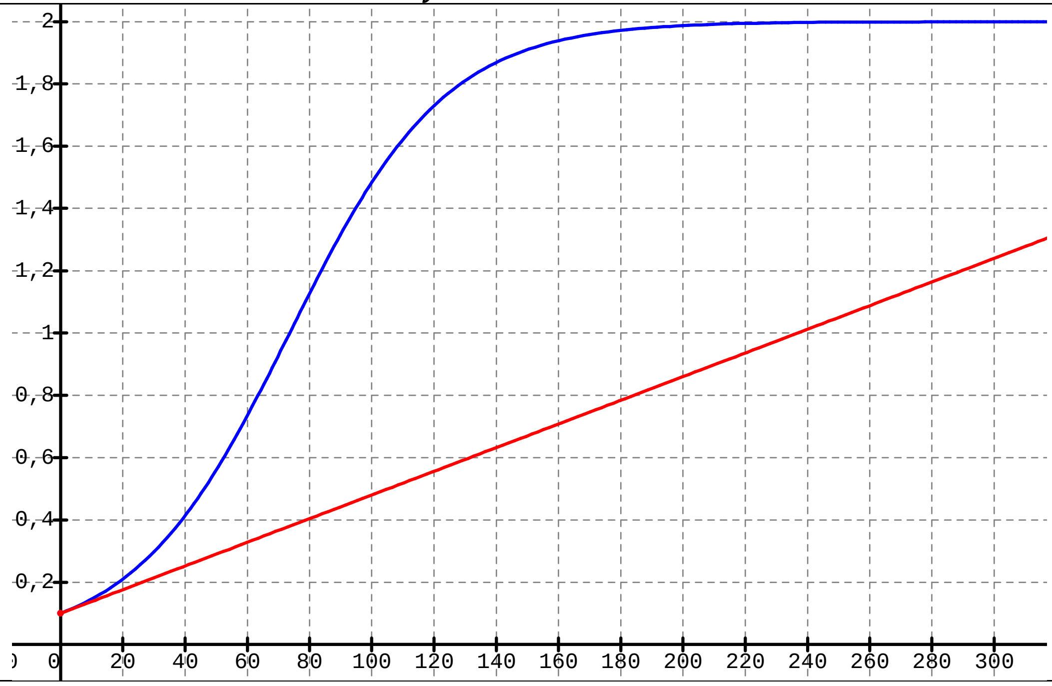
$$\Leftrightarrow t \approx \frac{-4,04305126783}{-0,04} \approx 101,0762817 \approx 101,1 \text{ au dixième près}$$

Le pépiniériste pourra proposer ses plants de bambou à la vente, au bout de 101,1 jours.

3.

L'équation de la tangente au point d'abscisse 0 est :

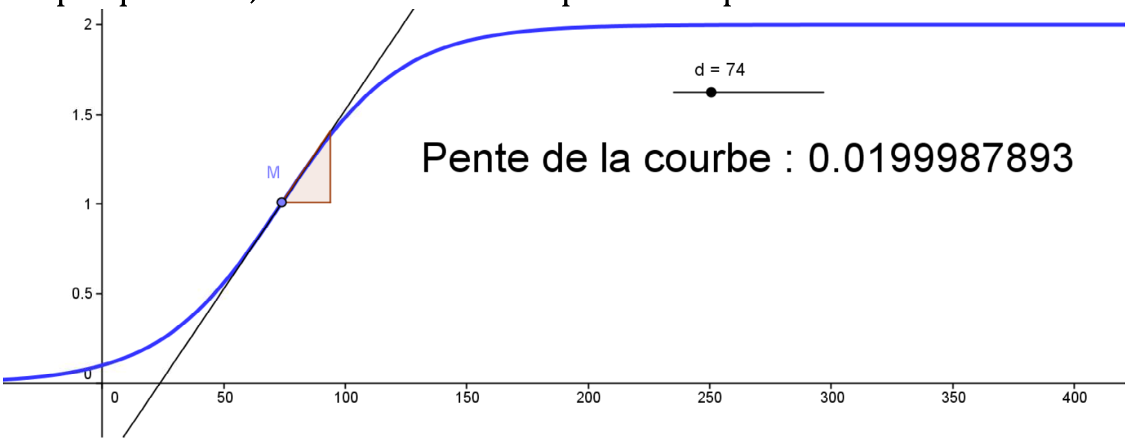
$$y = f'(0)(x-0) + f(0)$$
$$y = 0,0038x + 0,1$$



Exercice 3. Partie 2.

4. (1)

Graphiquement, nous cherchons la plus forte pente :



Ou bien, pour ceux qui ont vu le logarithme népérien par le calcul, on dérive la dérivée :

$\forall t \in [0;250]$,

$$f''(t) = \frac{-0{,}0608e^{-0{,}04t}(1+19e^{-0{,}04t})^2 - 1{,}52e^{-0{,}04t} \times 2(1+19e^{-0{,}04t})(-0{,}76e^{-0{,}04t})}{(1+19e^{-0{,}04t})^4}$$

$$f''(t) = \frac{-0{,}0608e^{-0{,}04t}(1+19e^{-0{,}04t}) + 2{,}3104(e^{-0{,}04t})^2}{(1+19e^{-0{,}04t})^3}$$

$$= \frac{-0{,}0608e^{-0{,}04t} + 1{,}1552e^{-0{,}08t}}{(1+19e^{-0{,}04t})^3}$$

$$= \frac{-0{,}0608e^{-0{,}04t}(1-19e^{-0{,}04t})}{(1+19e^{-0{,}04t})^3}$$

$$-0{,}0608e^{-0{,}04t} < 0 \text{ et } (1+19e^{-0{,}04t})^3 > 0$$

$$f''(t) > 0 \Leftrightarrow 1 - 19e^{-0{,}04t} < 0$$

$$\Leftrightarrow -19e^{-0{,}04t} < -1$$

$$\Leftrightarrow e^{-0{,}04t} > \frac{1}{19}$$

$$\Leftrightarrow -0{,}04t > \ln\left(\frac{1}{19}\right)$$

$$\Leftrightarrow t < \frac{-\ln(19)}{-0{,}04} = \frac{\ln(19)}{0{,}04}$$

t	0		$\frac{\ln(19)}{0{,}04}$		250
$f''(t)$		$+$	0	$-$	
$f'(t)$		$\nearrow$		$\searrow$	

La pente est alors maximale pour $t = \frac{\ln(19)}{0{,}04} \approx 73{,}61097$

Exercice 4. Partie A.

1.	Pour tout entier naturel n, $u_n + v_n = 120$	**0,25**
2.	Dans la cellule B3, il faut saisir : « =0,9*B2+0,05*C2 » Dans la cellule C3, on peut saisir : « =0,1*B2+0,95*C2 » ou bien « =120-B3 »	**0,5**
3.	On peut conjecturer que la population en zone rurale converge vers 40 millions et la population en zone urbaine converge vers 80 millions.	**0,25**

Exercice 4. Partie A. OBLIGATOIRE	**1.**	Démontrons par récurrence que $\mathcal{P}(n)$: $u_{n+1} \leq u_n$ est vraie pour tout $n \in \mathbb{N}$. **Initialisation** pour $n = 0$: $u_0 = 90$ $u_1 = 0{,}85 \times 90 + 6 = 82{,}5 < u_0$ donc $\mathcal{P}(0)$ est vraie. **Hérédité :** On suppose que $\mathcal{P}(n)$: $u_{n+1} \leq u_n$ est vraie pour $n \in \mathbb{N}$ fixé $u_{n+1} \leq u_n$ $\Leftrightarrow 0{,}85 \times u_{n+1} \leq 0{,}85 \times u_n$ $\Leftrightarrow 0{,}85 \times u_{n+1} + 6 \leq 0{,}85 \times u_n + 6$ $\Leftrightarrow u_{n+2} \leq u_{n+1}$ donc $\mathcal{P}(n+1)$ est vraie Par conséquent $u_{n+1} \leq u_n$ pour tout $n \in \mathbb{N}$. La suite (u_n) est décroissante.	**1**
		On admet que $u_n \geq 0$ pour tout entier naturel n. La suite (u_n) est donc minorée. Puisqu'elle est aussi décroissante, alors elle est convergente.	**0,5**
	2.	Pour tout $n \geq 0$, $\dfrac{w_{n+1}}{w_n} = \dfrac{u_{n+1} - 40}{u_n - 40} = \dfrac{0{,}85u_n + 6 - 40}{u_n - 40} = \dfrac{0{,}85u_n - 34}{u_n - 40} = \dfrac{0{,}85(u_n - 40)}{u_n - 40}$ $\dfrac{w_{n+1}}{w_n} = 0{,}85$ On en déduit que la suite (w_n) est géométrique de raison 0,85 et $w_0 = u_0 - 40 = 90 - 40 = 50$	**0,5**
		Par conséquent, pour tout $n \geq 0$, $w_n = w_0 \times q^n = 50 \times 0{,}85^n$ Et donc, pour tout $n \geq 0$, $u_n = w_n + 40 = 50 \times 0{,}85^n + 40$	**0,5**
		On en déduit alors que, pour tout $n \geq 0$, $v_n = 120 - u_n = 120 - (50 \times 0{,}85^n + 40) = 120 - 50 \times 0{,}85^n - 40$ $v_n = 80 - 50 \times 0{,}85^n$	**0,25**
	3.	$\lim\limits_{n \to +\infty} 0{,}85^n = 0$ car $0 < 0{,}85 < 1$ alors $\lim\limits_{n \to +\infty} u_n = 40$ et $\lim\limits_{n \to +\infty} v_n = 80$ Les conjectures étaient donc vraies.	**0,5**
	4.	Cet algortihme permet de déterminer au bout de combien d'années, la population rurale sera inférieure à la population urbaine.	**0,5**
		L'algorithme affiche la valeur 6.	**0,25**

<table>
<tr><td rowspan="9">Exercice 4. SPECIALITE</td><td rowspan="2">1.</td><td>Pour tout entier naturel n,
$$MU_n = \begin{pmatrix} 0,9 & 0,05 \\ 0,1 & 0,95 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} R_n \\ C_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0,9R_n + 0,05C_n \\ 0,1R_n + 0,95C_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} R_{n+1} \\ C_{n+1} \end{pmatrix} = U_{n+1}$$</td><td>0,5</td></tr>
<tr><td>$U_1 = MU_0 = \begin{pmatrix} 0,9 & 0,05 \\ 0,1 & 0,95 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 90 \\ 30 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 82,5 \\ 37,5 \end{pmatrix}$
En 2011, la population rurale était de 82,5 millions d'habitants et la population urbaine était de 37,5 millions d'habitants.</td><td>0,25</td></tr>
<tr><td>2.</td><td>Démontrons par récurrence que $\mathcal{P}(n) : \ U_n = M^n U_0$ est vraie pour tout $n \in \mathbb{N}^*$.
Initialisation pour $n = 1$:
$$U_1 = MU_0$$
donc $\mathcal{P}(1)$ est vraie.
Hérédité : On suppose que $\mathcal{P}(n) : U_n = M^n U_0$ est vraie pour $n \in \mathbb{N}^*$ fixé
$$U_{n+1} = MU_n = M(M^n U_0) = (M \times M^n)U_0 = M^{n+1}U_0$$
donc $\mathcal{P}(n+1)$ est vraie
Par conséquent $U_n = M^n U_0$ pour tout $n \in \mathbb{N}^*$.</td><td>0,5</td></tr>
<tr><td>3.</td><td>$$\begin{pmatrix} \frac{1}{3} & \frac{1}{3} \\ \frac{2}{3} & -\frac{1}{3} \end{pmatrix} \times P = \begin{pmatrix} \frac{1}{3} & \frac{1}{3} \\ \frac{2}{3} & -\frac{1}{3} \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 2 & -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{1}{3} + \frac{2}{3} & \frac{1}{3} - \frac{1}{3} \\ \frac{2}{3} - \frac{2}{3} & \frac{2}{3} - \left(-\frac{1}{3}\right) \end{pmatrix}$$
$$= \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = I$$
La matrice P est donc inversible et $P^{-1} = \begin{pmatrix} \frac{1}{3} & \frac{1}{3} \\ \frac{2}{3} & -\frac{1}{3} \end{pmatrix}$.</td><td>0,5</td></tr>
<tr><td rowspan="2">4.</td><td>$$\Delta = P^{-1}MP = \begin{pmatrix} \frac{1}{3} & \frac{1}{3} \\ \frac{2}{3} & -\frac{1}{3} \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 0,9 & 0,05 \\ 0,1 & 0,95 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 2 & -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0,85 \end{pmatrix}$$</td><td>0,25</td></tr>
<tr><td>$$\Delta = P^{-1}MP$$
$$\Leftrightarrow P \times \Delta = \underbrace{P \times P^{-1}}_{I} MP = MP$$
$$\Leftrightarrow P \times \Delta \times P^{-1} = M \underbrace{P \times P^{-1}}_{I} = M$$</td><td>0,5</td></tr>
</table>

Exercice 4. SPECIALITE		Démontrons par récurrence que $\mathcal{P}(n)$: $M^n = P\Delta^nP^{-1}$ est vraie pour tout $n \in \mathbb{N}^*$. **Initialisation** pour $n = 1$: $M = P \times \Delta \times P^{-1}$ donc $\mathcal{P}(1)$ est vraie. **Hérédité :** On suppose que $\mathcal{P}(n)$: $M^n = P\Delta^nP^{-1}$ est vraie pour $n \in \mathbb{N}^*$ fixé $M^{n+1} = M \times M^n = M \times P\Delta^nP^{-1} = P \times \Delta \times \underbrace{P^{-1} \times P}_{I}\Delta^nP^{-1}$ $M^{n+1} = P \times \underbrace{\Delta \times \Delta^n}_{\Delta^{n+1}} P^{-1} = P\Delta^{n+1}P^{-1}$ donc $\mathcal{P}(n+1)$ est vraie Par conséquent $M^n = P\Delta^nP^{-1}$ pour tout $n \in \mathbb{N}^*$.	1
	5.	Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, $M^n = \begin{pmatrix} \frac{1}{3} + \frac{2}{3} \times 0{,}85^n & \frac{1}{3} - \frac{1}{3} \times 0{,}85^n \\ \frac{2}{3} - \frac{2}{3} \times 0{,}85^n & \frac{2}{3} + \frac{1}{3} \times 0{,}85^n \end{pmatrix}$ $U_n = M^nU_0 = \begin{pmatrix} \frac{1}{3} + \frac{2}{3} \times 0{,}85^n & \frac{1}{3} - \frac{1}{3} \times 0{,}85^n \\ \frac{2}{3} - \frac{2}{3} \times 0{,}85^n & \frac{2}{3} + \frac{1}{3} \times 0{,}85^n \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 90 \\ 30 \end{pmatrix}$ $U_n = \begin{pmatrix} 90\left(\frac{1}{3} + \frac{2}{3} \times 0{,}85^n\right) + 30\left(\frac{1}{3} - \frac{1}{3} \times 0{,}85^n\right) \\ 90\left(\frac{2}{3} - \frac{2}{3} \times 0{,}85^n\right) + 30\left(\frac{2}{3} + \frac{1}{3} \times 0{,}85^n\right) \end{pmatrix}$ $U_n = \begin{pmatrix} 30 + 60 \times 0{,}85^n + 10 - 10 \times 0{,}85^n \\ 60 - 60 \times 0{,}85^n + 60 + 10 \times 0{,}85^n \end{pmatrix}$ $U_n = \begin{pmatrix} 40 + 50 \times 0{,}85^n \\ 80 - 50 \times 0{,}85^n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} R_n \\ C_n \end{pmatrix}$ On en déduit alors que $R_n = 40 + 50 \times 0{,}85^n$ et $C_n = 80 - 50 \times 0{,}85^n$	0,5
		$\lim\limits_{n \to +\infty} 0{,}85^n = 0$ car $0 < 0{,}85 < 1$ alors $\lim\limits_{n \to +\infty} R_n = 40$ et $\lim\limits_{n \to +\infty} C_n = 80$ La population en zone rurale converge vers 40 millions d'habitants et la population en zone urbaine converge vers 80 millions d'habitants.	0,25
	6.	**Traitement :** Tant que $R > C$ faire n prend la valeur $n + 1$ R prend la valeur $50 \times 0{,}85^n + 40$ C prend la valeur $120 - R$ Fin Tant que	0,25

<table>
<tr>
<td rowspan="2">Exercice 4. SPECIALITE</td>
<td rowspan="2"></td>
<td>Pour ceux qui ont vu le logarithme :
$50 \times 0{,}85^n + 40 < 80 - 50 \times 0{,}85^n$
$\Leftrightarrow 100 \times 0{,}85^n < 40$
$\Leftrightarrow 0{,}85^n < 0{,}4$
$(0{,}85^n)$ est une suie géométrique décroissane et, par essais e tcorrections successifs, j'obtiens :
$0{,}85^5 \approx 0{,}44 > 0{,}4$
$0{,}85^6 \approx 0{,}37 < 0{,}4$</td>
<td>Pour ceux qui ont vu le logarithme :
$50 \times 0{,}85^n + 40 < 80 - 50 \times 0{,}85^n$
$\Leftrightarrow 100 \times 0{,}85^n < 40$
$\Leftrightarrow 0{,}85^n < 0{,}4$
$\Leftrightarrow \ln(0{,}85^n) < \ln(0{,}4)$
$\Leftrightarrow n \times \ln(0{,}85) < \ln(0{,}4)$
$\Leftrightarrow n > \dfrac{\ln(0{,}4)}{\ln(0{,}85)}$
On obtient alors $n > 5{,}63$</td>
<td rowspan="2">0,5</td>
</tr>
<tr>
<td colspan="2">D'où $n \geq 6$
Au bout de 6 ans, la population urbaine dépassera la population rurale.</td>
</tr>
</table>