

**BACCALAUREAT BLANC  
Session 2016**

**MATHEMATIQUES**

**Série S**

**Durée de l'épreuve : 4 heures**

**Coefficient : 7**

**ENSEIGNEMENT OBLIGATOIRE**

**L'usage des calculatrices est autorisé conformément à la réglementation en vigueur.  
(Une seule calculatrice par candidat).**

**Le sujet est composé de quatre exercices indépendants.**

**Le candidat doit traiter tous les exercices.**

**Le candidat est invité à faire figurer sur la copie toute trace de recherche, même incomplète ou non fructueuse, qu'il aura développée. Il est rappelé que la qualité de la rédaction, la clarté et la précision des raisonnements entreront pour une part importante dans l'appréciation des copies.**

**Le candidat doit rendre la feuille d'annexe (*page 8 sur 8*).**

### Exercice 1 - [6 points]

**Les deux parties sont indépendantes; les questions sont, pour une large partie, indépendantes.**

Le plan est muni d'un repère orthonormé  $(O; \vec{i}; \vec{j})$ .

On place un robot au point  $O$ . Soit  $n$  un entier naturel non nul et  $p$  un réel de l'intervalle  $]0; 1[$ . Le robot doit effectuer  $n$  déplacements successifs. Chaque déplacement du robot se fait indépendamment des autres déplacements.

Pour chaque déplacement, le robot ne peut se déplacer que :

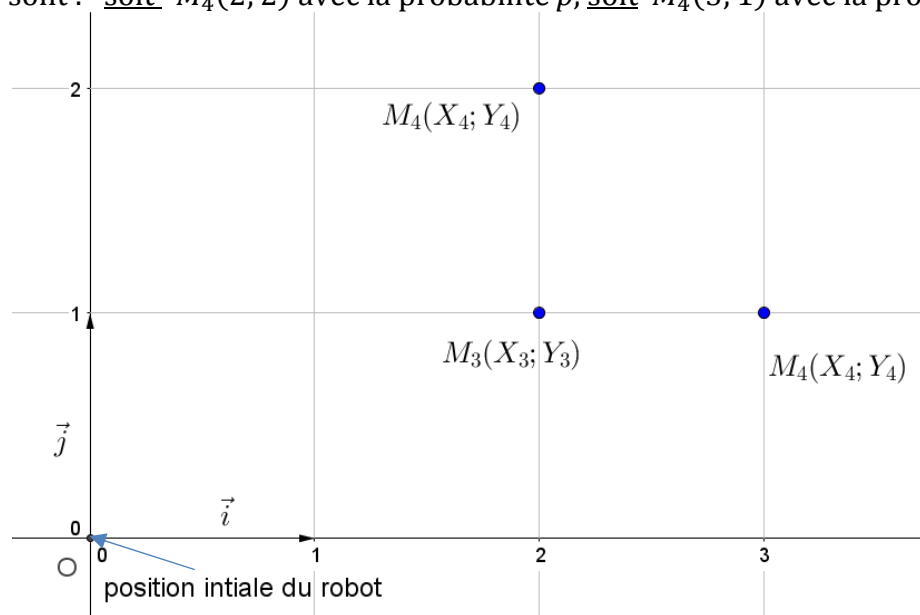
- soit d'une unité vers le haut avec une probabilité  $p$  ;
- soit d'une unité vers la droite avec une probabilité de  $1 - p$ .

On pose,  $M_n$  la position du robot au bout de  $n$  déplacements.

$X_n$  est l'abscisse de  $M_n$  et  $Y_n$  est l'ordonnée de  $M_n$ .

**Par exemple** sur la figure ci-dessous le point  $M_3$  de coordonnées  $(X_3; Y_3)$  désigne la position du robot au bout de trois déplacements, on aura ici  $X_3 = 2$  et  $Y_3 = 1$ .

Les seules positions possibles  $M_4(X_4; Y_4)$  que peut atteindre le robot à partir de la position  $M_3(2; 1)$  sont : soit  $M_4(2; 2)$  avec la probabilité  $p$ , soit  $M_4(3; 1)$  avec la probabilité  $1 - p$ .



**PARTIE 1 : Dans toute cette partie, on pose  $p = 0,25$ .**

On rappelle que la fonction *ALEA* renvoie un nombre réel aléatoire entre 0 et 1.

On se donne l'algorithme suivant :

#### VARIABLES

$X, Y$  et  $K$  sont du type nombre

#### TRAITEMENT

$X$  prend la valeur 0

$Y$  prend la valeur 0

Pour  $K$  entier allant de 1 à 3

Si  $ALEA \leq 0,25$

alors  $Y$  prend la valeur  $Y + 1$

sinon  $X$  prend la valeur  $X + 1$

Fin si

Fin pour

#### SORTIE

Afficher les valeurs des variables  $X$  et  $Y$

#### FIN

►1. Dans le tableau suivant, on a rempli les cases correspondant aux différentes valeurs de  $ALEA$ . Sur l'**annexe exercice 1** que vous rendrez avec votre copie, compléter les autres cases du tableau, et en déduire les coordonnées  $(X_3; Y_3)$  du point  $M_3$  obtenu.

	initialisation			
Valeurs de $K$		1	2	3
Valeurs de $X$				
Valeurs de $Y$				
Valeurs de $ALEA$		0,3456	0,546	0,245

►2. On pose  $E$  l'évènement le pion est arrivé au point  $M_2(1; 1)$  en deux déplacements. On pose  $F$  l'évènement le pion est arrivé au point  $M_3(2; 1)$  en trois déplacements.

- Démontrer que  $P(E) = \frac{3}{8}$
- Démontrer que  $P(F) = \frac{3^3}{4^3}$
- Démontrer que  $P(E \cap F) = \frac{9}{32}$ .
- Déduire des questions précédentes  $P_F(E)$ .

►3. Les évènements  $E$  et  $\bar{F}$  sont-ils indépendants ?  
(l'évènement  $\bar{F}$  désigne l'évènement contraire de  $F$ )

**PARTIE 2 : Dans toute cette partie, on pose  $p = 0,7$  et  $n = 60$ .**

►1. a) Démontrer que la variable aléatoire  $Y_{60}$  suit une loi binomiale de paramètres 60 et 0,7.  
b) Démontrer que tous les points  $M_{60}$  de coordonnées  $(X_{60}; Y_{60})$  sont sur une même droite dont on donnera une équation dans le repère  $(O; \vec{i}; \vec{j})$ .

►2. On note par  $G$  l'évènement : «  $35 \leq Y_{60} \leq 49$  ».  
a) Déterminer une valeur approchée de  $P(G)$  à 0,001 près. Vous ferez clairement apparaître les calculs effectués. Vous pourrez utiliser le tableau de l'**annexe exercice 1**, ou votre calculatrice.  
b) Un élève a simulé l'expérience précédente, et a obtenu comme position d'arrivée le point  $M_{60}(35; 25)$ . « Je suis quasiment sûr que cette simulation est fautive » dit le professeur. Etes-vous d'accord ou non avec l'affirmation du professeur ? Expliquer le plus précisément possible votre réponse.

### Exercice 2 - [4 points]

Le plan complexe est rapporté à un repère orthonormal direct  $(O; \vec{u}, \vec{v})$ .

On note  $\mathbb{C}$  l'ensemble des nombres complexes.

Pour chacune des propositions, indiquer si elle est vraie ou fautive et justifier la réponse choisie.

Une réponse non justifiée n'est pas prise en compte.

►1. Soit le point  $A$  d'affixe  $-i$  ; le point  $B$  d'affixe 2 et le point  $C$  d'affixe  $2 - i$ .

**Affirmation 1** : L'ensemble des points  $M$  du plan d'affixe  $z$  vérifiant  $|z - 2 + i| = 2$  est la droite  $(AB)$ .

►2. Soit  $j$  le nombre complexe de module 1 et d'argument  $\frac{2\pi}{3}$ .

**Affirmation 2** :  $1 + j + j^2 = 0$ .

►3. **Affirmation 3** : Le nombre  $(\sqrt{3} + i)^{2016}$  est un **réel positif**.

►4. **Affirmation 4** : Dans l'ensemble  $\mathbb{C}$ , l'équation  $z - \bar{z} + 2 - 4i = 0$  admet une unique solution.

### Exercice 3 - [5 points]

#### Partie 1

On s'intéresse à l'évolution de la hauteur d'un plant de bambou en fonction du temps. Le graphique dans **l'annexe exercice 3** représente cette évolution. La hauteur est exprimée en mètres et le temps en jours. On décide de modéliser cette croissance par une fonction du type

$$h(t) = \frac{a}{1 + be^{-0,04t}}$$

où  $a$  et  $b$  sont des constantes réelles positives,  $t$  est la variable temps exprimée en jours et  $h(t)$  désigne la hauteur du plant exprimée en mètres.

On sait que la limite maximale de la hauteur du bambou est de 2 m et qu'initialement la hauteur du bambou est de 0,1 m.

►1. Démontrer que  $\lim_{t \rightarrow +\infty} h(t) = a$ .

►2. Déterminer, en justifiant, les valeurs exactes des constantes  $a$  et  $b$ .

#### Partie 2

On considère désormais que la croissance du plant de bambou est donnée par la fonction  $f$  définie sur  $[0; 250]$  par

$$f(t) = \frac{2}{1 + 19e^{-0,04t}}$$

►1. a) Déterminer pour tout  $t$  réel de l'intervalle  $[0; 250]$ , l'expression de  $f'(t)$  en fonction de  $t$  (où  $f'$  désigne la fonction dérivée de la fonction  $f$ ) et **vérifier que**  $f'(0) = 0,0038$ .

b) En déduire les variations de la fonction  $f$  sur l'intervalle  $[0; 250]$ .

►2. Un pépiniériste décide de commercialiser ses plants de bambou lorsqu'ils ont atteint la hauteur de 1,5 m. A l'aide de la capture d'écran d'un logiciel de calcul formel ci-dessous, **déterminer le temps, au dixième de jours près**, nécessaire pour que le plant de bambou puisse être proposé à la vente par le pépiniériste.

1 Résoudre_numérique( exp(x) = 1/57 )
-4.04305126783

►3. a) Déterminer une équation de la tangente  $T$  à la courbe représentant la fonction  $f$  au point d'abscisse 0.

b) Représenter cette droite sur **l'annexe 3 exercice 3** que vous rendrez avec votre copie.

►4. On étudie maintenant la vitesse de croissance instantanée du plant de bambou ; elle est donnée par la fonction  $f'$  dérivée de  $f$ . Donner une valeur approchée de la vitesse instantanée maximale du plant au dixième près. Donner la hauteur du plant correspondant. **Vous ferez apparaître sur votre copie toute trace de recherche.**

**Exercice 4 - [5 points]**

Dans un pays de population constante égale à 120 millions, les habitants vivent soit en zone rurale, soit en ville. Les mouvements de population peuvent être modélisés de la façon suivante :

- en 2010, la population compte 90 millions de ruraux et 30 millions de citadins ;
- chaque année, 10% des ruraux émigrent à la ville ;
- chaque année, 5% des citadins émigrent en zone rurale.

Pour tout entier naturel  $n$ , on note :

- $u_n$  la population en zone rurale, en l'année 2010 +  $n$ , exprimée en millions d'habitants;
- $v_n$  la population en ville, en l'année 2010 +  $n$ , exprimée en millions d'habitants.

On a donc  $u_0 = 90$  et  $v_0 = 30$ .

**Partie A**

►1. Traduire le fait que la population totale est constante par une relation liant  $u_n$  et  $v_n$ .

►2. On utilise un tableur pour visualiser l'évolution des suites  $(u_n)$  et  $(v_n)$ .

Quelles formules peut-on saisir dans les cellules B3 et C3 qui, recopiées vers le bas, permettent d'obtenir la feuille de calcul ci-dessous :

	A	B	C
1	$n$	Population en zone rurale	Population en ville
2	0	90	30
3	1	82,5	37,5
4	2	76,125	43,875
5	3	70,706	49,294
6	4	66,100	53,900
7	5	62,185	57,815
8	6	58,857	61,143
9	7	56,029	63,971
10	8	53,625	66,375
11	9	51,581	68,419
12	10	49,844	70,156
13	11	48,367	71,633
14	12	47,112	72,888
15	13	46,045	73,955
16	14	45,138	74,862
17	15	44,368	75,632
18	16	43,713	76,287
19	17	43,156	76,844
20	18	42,682	77,318
21	19	42,280	77,720
22	20	41,938	78,062
23	21	41,647	78,353
24	22	41,400	78,600
	...	...	...
61	59	40,003	79,997
62	60	40,003	79,997
63	61	40,002	79,998

►3. Quelles conjectures peut-on faire concernant l'évolution à long terme de cette population ?



## Partie B

On admet dans cette partie que, pour tout entier naturel  $n$ ,  $u_{n+1} = 0,85 u_n + 6$ .

- ▶ 1. a) Démontrer par récurrence que la suite  $(u_n)$  est décroissante.  
b) On admet que  $u_n$  est positif pour tout entier naturel  $n$ .  
Que peut-on en déduire quant à la suite  $(u_n)$  ?
- ▶ 2. On considère la suite  $(w_n)$ , définie par :  $w_n = u_n - 40$ , pour tout  $n \geq 0$ .  
a) Démontrer que  $(w_n)$  est une suite géométrique de raison 0,85.  
b) En déduire l'expression de  $w_n$  puis de  $u_n$  en fonction de  $n$ .  
c) Déterminer l'expression de  $v_n$  en fonction de  $n$ .
- ▶ 3. Valider ou invalider les conjectures effectuées à la question 3. de la partie A.
- ▶ 4. On considère l'algorithme suivant :

<b>Entrée :</b>	$n$ et $u$ sont des nombres
<b>Initialisation :</b>	$n$ prend la valeur 0 $u$ prend la valeur 90
<b>Traitement :</b>	Tant que $u \geq 120 - u$ faire $n$ prend la valeur $n + 1$ $u$ prend la valeur $0,85 \times u + 6$ Fin Tant que
<b>Sortie :</b>	Afficher $n$

- a) Que fait cet algorithme?
- b) Quelle valeur affiche-t-il?

**Annexe : Exercice 1.**

<b>Valeur <math>k</math></b>	<b>Probabilité <math>P(Y_{60} \leq k)</math></b>	<b>Valeur <math>k</math></b>	<b>Probabilité <math>P(Y_{60} \leq k)</math></b>	<b>Valeur <math>k</math></b>	<b>Probabilité <math>P(Y_{60} \leq k)</math></b>
0	4,23912E-32				
1	5,97715E-30	21	2,319E-08	41	0,4367601
2	4,14487E-28	22	9,7947E-08	42	0,54856372
3	1,88428E-26	23	3,8614E-07	43	0,65776726
4	6,31584E-25	24	1,4228E-06	44	0,75621591
5	1,66446E-23	25	4,9061E-06	45	0,83789182
6	3,59144E-22	26	1,5847E-05	46	0,90003654
7	6,52414E-21	27	4,7995E-05	47	0,94322932
8	1,01825E-19	28	0,0001364	48	0,97052476
9	1,38662E-18	29	0,00036403	49	0,98612215
10	1,66757E-17	30	0,00091285	50	0,99412881
11	1,78832E-16	31	0,00215213	51	0,99779199
12	1,72382E-15	32	0,0047727	52	0,99927135
13	1,50345E-14	33	0,00996088	53	0,99979238
14	1,19302E-13	34	0,01957429	54	0,99994998
15	8,6539E-13	35	0,03623752	55	0,9999901
16	5,7616E-12	36	0,06323813	56	0,99999845
17	3,53308E-11	37	0,10410392	57	0,99999982
18	2,00152E-10	38	0,16181788	58	0,99999999
19	1,05028E-09	39	0,23778327	59	1
20	5,11674E-09	40	0,33084088	60	1



**Annexe : Exercice 1.**  
**(à compléter et à remettre avec la copie)**

	initialisation			
Valeurs de $K$		1	2	3
Valeurs de $X$				
Valeurs de $Y$				
Valeurs de $ALEA$		0,3456	0,546	0,245

**Annexe : Exercice 3.**  
**(à compléter et à remettre avec la copie)**

