BACCALAUREAT BLANC
Session 2016

MATHEMATIQUES

Série S

Durée de l'épreuve : 4 heures **Coefficient : 9**

ENSEIGNEMENT DE SPECIALITE

L'usage des calculatrices est autorisé conformément à la réglementation en vigueur.
(Une seule calculatrice par candidat).

Le sujet est composé de quatre exercices indépendants.

Le candidat doit traiter tous les exercices.

Le candidat est invité à faire figurer sur la copie toute trace de recherche, même incomplète ou non fructueuse, qu'il aura développée. Il est rappelé que la qualité de la rédaction, la clarté et la précision des raisonnements entreront pour une part importante dans l'appréciation des copies.

Le candidat doit rendre la feuille d'annexe (*page 7 sur 7*).

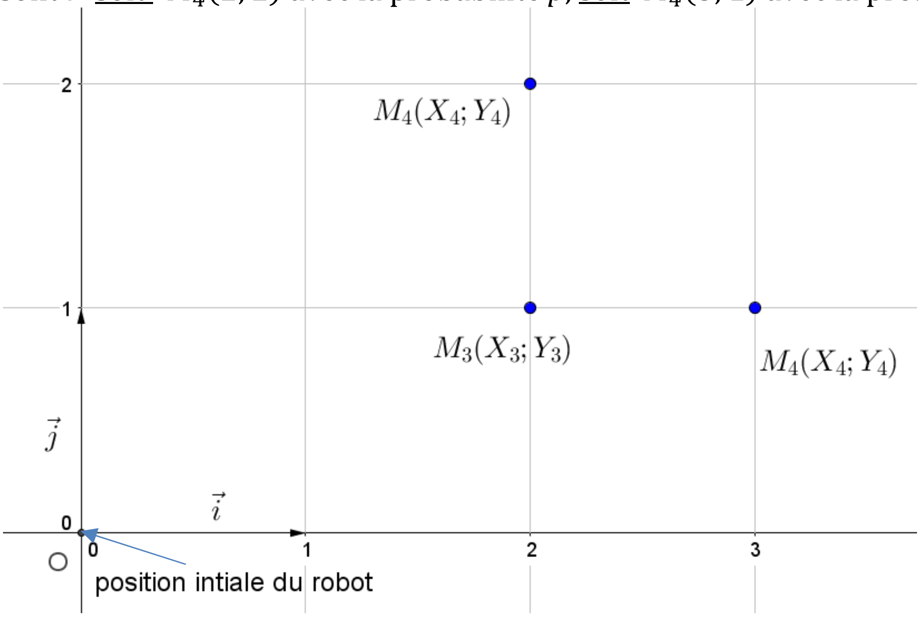
Exercice 1 – [6 points]

Les deux parties sont indépendantes, les questions sont, pour une large partie, indépendantes.
Le plan est muni d'un repère orthonormé $(O; \vec{\imath}; \vec{\jmath})$.
On place un robot au point O. Soit n un entier naturel non nul et p un réel de l'intervalle $]0; 1[$. Le robot doit effectuer n déplacements successifs. Chaque déplacement du robot se fait indépendamment des autres déplacements.
Pour chaque déplacement, le robot ne peut se déplacer que :

- soit d'une unité vers le haut avec une probabilité p ;
- soit d'une unité vers la droite avec une probabilité de $1 - p$.

On pose, M_n la position du robot au bout de n déplacements.
X_n est l'abscisse de M_n et Y_n est l'ordonnée de M_n.

Par exemple sur la figure ci-dessous le point M_3 de coordonnées $(X_3; Y_3)$ désigne la position du robot au bout de trois déplacements, on aura ici $X_3 = 2$ et $Y_3 = 1$.
Les seules positions possibles $M_4(X_4; Y_4)$ que peut atteindre le robot à partir de la position $M_3(2; 1)$ sont : soit $M_4(2; 2)$ avec la probabilité p, soit $M_4(3; 1)$ avec la probabilité $1 - p$.



PARTIE 1 : Dans toute cette partie, on pose $p = 0,25$.
On rappelle que la fonction $ALEA$ renvoie un nombre réel aléatoire entre 0 et 1.
On se donne l'algorithme suivant :

```
VARIABLES
        X, Y et K sont du type nombre
TRAITEMENT
        X prend la valeur 0
        Y prend la valeur 0
        Pour K entier allant de 1 à 3
            Si ALEA ≤ 0,25
              alors Y prend la valeur Y + 1
              sinon X prend la valeur X + 1
            Fin si
        Fin pour
SORTIE
        Afficher les valeurs des variables X et Y
FIN
```

▶1. Dans le tableau suivant, on a rempli les cases correspondant aux différentes valeurs de $ALEA$. Sur **l'annexe exercice 1** que vous rendrez avec votre copie, compléter les autres cases du tableau, et en déduire les coordonnées $(X_3; Y_3)$ du point M_3 obtenu.

	initialisation			
Valeurs de K		1	2	3
Valeurs de X				
Valeurs de Y				
Valeurs de $ALEA$		0,3456	0,546	0,245

▶2. On pose E l'évènement le pion est arrivé au point $M_2(1; 1)$ en deux déplacements.
On pose F l'évènement le pion est arrivé au point $M_3(2; 1)$ en trois déplacements.

a) Démontrer que $P(E) = \frac{3}{8}$

b) Démontrer que $P(F) = \frac{3^3}{4^3}$

c) Démontrer que $P(E \cap F) = \frac{9}{32}$.

d) Déduire des questions précédentes $P_F(E)$.

▶3. Les évènements E et $\overline{F}$ sont-ils indépendants ?
(l'évènement $\overline{F}$ désigne l'évènement contraire de F)

PARTIE 2 : Dans toute cette partie, on pose $p = 0,7$ et $n = 60$.

▶1. a) Démontrer que la variable aléatoire Y_{60} suit une loi binomiale de paramètres 60 et 0,7.

b) Démontrer que tous les points M_{60} de coordonnées $(X_{60}; Y_{60})$ sont sur une même droite dont on donnera une équation dans le repère $(O; \vec{\imath}; \vec{\jmath})$.

▶2. On note par G l'évènement : « $35 \leq Y_{60} \leq 49$».

a) Déterminer une valeur approchée de $P(G)$ à 0,001 près. Vous ferez clairement apparaître les calculs effectués. Vous pourrez utiliser le tableau de l'**annexe exercice 1**, ou votre calculatrice.

b) Un élève a simulé l'expérience précédente, et a obtenu comme position d'arrivée le point $M_{60}(35; 25)$. « Je suis quasiment sûr que cette simulation est fausse » dit le professeur. Etes-vous d'accord ou non avec l'affirmation du professeur ? Expliquer le plus précisément possible votre réponse.

Exercice 2 – [4 points]

Le plan complexe est rapporté à un repère orthonormal direct $(O; \vec{u}, \vec{v})$.
On note $\mathbb{C}$ l'ensemble des nombres complexes.
Pour chacune des propositions, indiquer si elle est vraie ou fausse et justifier la réponse choisie.
Une réponse non justifiée n'est pas prise en compte.

▶1. Soit le point A d'affixe $-i$; le point B d'affixe 2 et le point C d'affixe $2 - i$.
Affirmation 1 : L'ensemble des points M du plan d'affixe z vérifiant $|z - 2 + i| = 2$ est la droite (AB).

▶2. Soit j le nombre complexe de module 1 et d'argument $\frac{2\pi}{3}$.
Affirmation 2 : $1 + j + j^2 = 0$.

▶3. **Affirmation 3 :** Le nombre $(\sqrt{3} + i)^{2016}$ est un **réel positif.**

▶4. **Affirmation 4 :** Dans l'ensemble $\mathbb{C}$, l'équation $z - \bar{z} + 2 - 4i = 0$ admet une unique solution.

Exercice 3 – [5 points]

Partie 1

On s'intéresse à l'évolution de la hauteur d'un plant de bambou en fonction du temps. Le graphique dans **l'annexe exercice 3** représente cette évolution. La hauteur est exprimée en mètres et le temps en jours. On décide de modéliser cette croissance par une fonction du type

$$h(t) = \frac{a}{1 + be^{-0,04t}}$$

où a et b sont des constantes réelles positives, t est la variable temps exprimée en jours et $h(t)$ désigne la hauteur du plan exprimée en mètres.

On sait que la limite maximale de la hauteur du bambou est de 2 m et qu'initialement la hauteur du bambou est de 0,1 m.

▶1. Démontrer que $\lim\limits_{t \to +\infty} h(t) = a$.

▶2. Déterminer, en justifiant, les valeurs exactes des constantes a et b.

Partie 2

On considère désormais que la croissance du plant de bambou est donnée par la fonction f définie sur $[0; 250]$ par

$$f(t) = \frac{2}{1 + 19e^{-0,04t}}$$

▶1. a) Déterminer pour tout t réel de l'intervalle $[0; 250]$, l'expression de $f'(t)$ en fonction de t (où f' désigne la fonction dérivée de la fonction$f$) et **vérifier que** $f'(0) = 0,0038$.

b) En déduire les variations de la fonction f sur l'intervalle $[0; 250]$.

▶2. Un pépiniériste décide de commercialiser ses plants de bambou lorsqu'ils ont atteint la hauteur de 1,5 m. A l'aide de la capture d'écran d'un logiciel de calcul formel ci-dessous, **déterminer le temps, au dixième de jours près,** nécessaire pour que le plan de bambou puisse être proposé à la vente par le pépiniériste.

1	Résoudre_numérique(exp(x) = 1/57)
	-4.04305126783

▶3. a) Déterminer une équation de la tangente T à la courbe représentant la fonction f au point d'abscisse 0.

b) Représenter cette droite sur **l'annexe exercice 3** que vous rendrez avec votre copie.

▶4. On étudie maintenant la vitesse de croissance instantanée du plant de bambou ; elle est donnée par la fonction f' dérivée de f. Donner une valeur approchée de la vitesse instantanée maximale du plant au dixième près. Donner la hauteur du plant correspondant. **Vous ferez apparaître sur votre copie toute trace de recherche.**

Exercice 4 – [5 points] - Spécialité

Dans un pays de population constante égale à 120 millions, les habitants vivent soit en zone rurale, soit en ville. Les mouvements de population peuvent être modélisés de la façon suivante :

- en 2010, la population compte 90 millions de ruraux et 30 millions de citadins ;
- chaque année, 10% des ruraux émigrent à la ville ;
- chaque année, 5% des citadins émigrent en zone rurale.

Pour tout entier naturel n, on note :

- R_n l'effectif de la population rurale, en l'année $2010 + n$, exprimée en millions d'habitants;
- C_n l'effectif de la population citadine, en l'année $2010 + n$, exprimée en millions d'habitants.

On a donc $R_0 = 90$ et $C_0 = 30$.

▶1. On considère les matrices $M = \begin{pmatrix} 0{,}9 & 0{,}05 \\ 0{,}1 & 0{,}95 \end{pmatrix}$ et, pour tout entier naturel n, $U_n = \begin{pmatrix} R_n \\ C_n \end{pmatrix}$.

a) Démontrer que, pour tout entier naturel n, $U_{n+1} = MU_n$.

b) Calculer U_1. En déduire le nombre de ruraux et le nombre de citadins en 2011.

▶2. Pour tout entier naturel n non nul, exprimer U_n en fonction de M^n et de U_0.

▶3. Soit la matrice $P = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 2 & -1 \end{pmatrix}$. Montrer que la matrice $\begin{pmatrix} \frac{1}{3} & \frac{1}{3} \\ \frac{2}{3} & -\frac{1}{3} \end{pmatrix}$ est la matrice inverse de P et on la notera P^{-1}.

▶4. a) On pose $\Delta = P^{-1}MP$. Calculer Δ à l'aide de la calculatrice.

b) Démontrer que : $M = P\Delta P^{-1}$.

c) Démontrer par récurrence que, pour tout entier naturel n non nul : $M^n = P\Delta^n P^{-1}$

▶5. a) On admet que le calcul matriciel précédent donne :

$$M^n = \begin{pmatrix} \frac{1}{3} + \frac{2}{3} \times 0{,}85^n & \frac{1}{3} - \frac{1}{3} \times 0{,}85^n \\ \frac{2}{3} - \frac{2}{3} \times 0{,}85^n & \frac{2}{3} + \frac{1}{3} \times 0{,}85^n \end{pmatrix}.$$

En déduire que, pour tout entier naturel n, $R_n = 50 \times 0{,}85^n + 40$ et déterminer l'expression de C_n en fonction de n.

b) Déterminer la limite de R_n et de C_n lorsque n tend vers $+\infty$.

Que peut-on en conclure pour la population étudiée?

▶6. a) On admet que (R_n) est décroissante et que (C_n) est croissante. Compléter l'algorithme donné en annexe afin qu'il affiche le nombre d'années au bout duquel la population urbaine dépassera la population rurale.

b) En résolvant l'inéquation d'inconnue n, $50 \times 0{,}85^n + 40 < 80 - 50 \times 0{,}85^n$, retrouver la valeur affichée par l'algorithme.

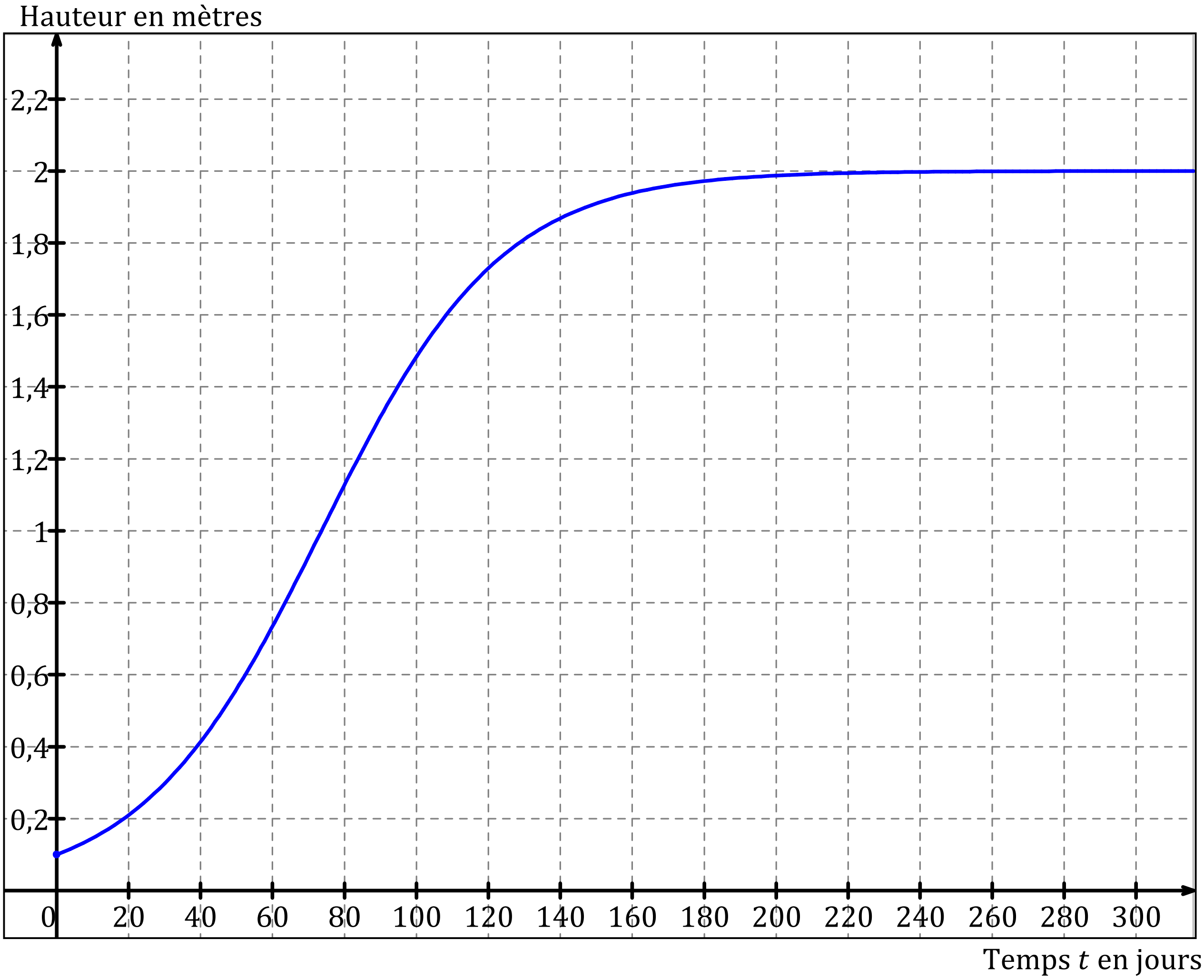
Annexe : Exercice 1.

Valeur k	Probabilité $P(Y_{60} \leq k)$	Valeur k	Probabilité $P(Y_{60} \leq k)$	Valeur k	Probabilité $P(Y_{60} \leq k)$
0	4,23912E-32				
1	5,97715E-30	21	2,319E-08	41	0,4367601
2	4,14487E-28	22	9,7947E-08	42	0,54856372
3	1,88428E-26	23	3,8614E-07	43	0,65776726
4	6,31584E-25	24	1,4228E-06	44	0,75621591
5	1,66446E-23	25	4,9061E-06	45	0,83789182
6	3,59144E-22	26	1,5847E-05	46	0,90003654
7	6,52414E-21	27	4,7995E-05	47	0,94322932
8	1,01825E-19	28	0,0001364	48	0,97052476
9	1,38662E-18	29	0,00036403	49	0,98612215
10	1,66757E-17	30	0,00091285	50	0,99412881
11	1,78832E-16	31	0,00215213	51	0,99779199
12	1,72382E-15	32	0,0047727	52	0,99927135
13	1,50345E-14	33	0,00996088	53	0,99979238
14	1,19302E-13	34	0,01957429	54	0,99994998
15	8,6539E-13	35	0,03623752	55	0,9999901
16	5,7616E-12	36	0,06323813	56	0,99999845
17	3,53308E-11	37	0,10410392	57	0,99999982
18	2,00152E-10	38	0,16181788	58	0,99999999
19	1,05028E-09	39	0,23778327	59	1
20	5,11674E-09	40	0,33084088	60	1

Annexe : Exercice 1.
(à compléter et à remettre avec la copie)

	initialisation			
Valeurs de K		1	2	3
Valeurs de X				
Valeurs de Y				
Valeurs de $ALEA$		0,3456	0,546	0,245

Annexe : Exercice 3.
(à compléter et à remettre avec la copie)



Annexe : Exercice 4. Spécialité
(à compléter et à remettre avec la copie)

Entrée :	n, R et C sont des nombres
Initialisation :	n prend la valeur 0
	R prend la valeur 90
	C prend la valeur 30
Traitement :	Tant que … … … faire
	n prend la valeur … …
	R prend la valeur $50 \times 0{,}85^n + 40$
	C prend la valeur … …
	Fin Tant que
Sortie :	Afficher n