EXERCICE 1. (9 points)

▶1. Résoudre l'inéquation $2\ln(x) \geq \ln 2 + \ln(12 - x)$.

▶2. Calculer la valeur exacte des intégrales suivantes :

$a)$ $\mathrm{I} = \displaystyle\int_1^2 (x^2 + 4x - 1)\,dx$

$b)$ $\mathrm{J} = \displaystyle\int_0^3 \frac{x}{2x^2 + 3}\,dx$

$c)$ $\mathrm{K} = \displaystyle\int_{-1}^0 \frac{1}{\sqrt{3x + 4}}\,dx$

$d)$ $\mathrm{L} = \displaystyle\int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin(x)\cos(x)\,dx$

$e)$ $\mathrm{M} = \displaystyle\int_1^2 \left(e^{-\frac{x}{2}} + \frac{2}{x^2}\right)dx$

EXERCICE 2. (10 points)

PARTIE A :

On considère la fonction f définie sur $\left]-\frac{1}{2};+\infty\right[$ par $f(x) = (2x + 1)\ln(2x + 1)$.

▶1. Déterminer les limites de la fonction f aux bornes de son ensemble de définition.

▶2. a) Démontrer que $f'(x)$ est du même signe que $[\ln(2x + 1) + 1]$.

b) Dresser, en justifiant, le tableau de variations de la fonction f.

c) Démontrer que la fonction f admet $-\frac{1}{e}$ pour minimum.

PARTIE B :

On considère la fonction F définie sur $\left]-\frac{1}{2};+\infty\right[$ par :

$$F(x) = \frac{(2x + 1)^2}{4}\ln(2x + 1) - \frac{(2x + 1)^2}{8}.$$

▶1. Démontrer que la fonction F est une primitive de la fonction f.

▶2. Démontrer alors que $\displaystyle\int_0^4 f(t)dt = \frac{81}{2}\ln(3) - 10$.

EXERCICE 3. (1 point)

Déterminer $\displaystyle\lim_{n\to+\infty} \int_0^1 e^{-\frac{x}{n}}dx$.

EXERCICE 1. (9 points)

▶1. Résoudre l'inéquation $2\ln(x) \geq \ln 2 + \ln(24 - x)$.

▶2. Calculer la valeur exacte des intégrales suivantes :

$a)$ $\mathrm{I} = \int_1^2 (x^2 - 6x + 1)\, dx$

$b)$ $\mathrm{J} = \int_0^2 \frac{x}{3x^2 + 2} dx$

$c)$ $\mathrm{K} = \int_{-2}^0 \frac{1}{\sqrt{4x + 9}} dx$

$d)$ $\mathrm{L} = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin(x)\cos(x)\, dx$

$e)$ $\mathrm{M} = \int_1^2 \left(e^{-\frac{x}{3}} + \frac{3}{x^2}\right) dx$

EXERCICE 2. (10 points)

PARTIE A :

On considère la fonction f définie sur $\left]-\frac{1}{3}; +\infty\right[$ par $f(x) = (3x + 1)\ln(3x + 1)$.

▶1. Déterminer les limites de la fonction f aux bornes de son ensemble de définition.

▶2. a) Démontrer que $f'(x)$ est du même signe que $[\ln(3x + 1) + 1]$.

b) Dresser, en justifiant, le tableau de variations de la fonction f.

c) Démontrer que la fonction f admet $-\frac{1}{e}$ pour minimum.

PARTIE B :

On considère la fonction F définie sur $\left]-\frac{1}{3}; +\infty\right[$ par :

$$F(x) = \frac{(3x + 1)^2}{6}\ln(3x + 1) - \frac{(3x + 1)^2}{12}.$$

▶1. Démontrer que la fonction F est une primitive de la fonction f.

▶2. Démontrer alors que $\int_0^1 f(t)dt = \frac{16}{3}\ln(2) - \frac{5}{4}$.

EXERCICE 3. (1 point)

Déterminer $\lim\limits_{n \to +\infty} \int_0^1 e^{-\frac{x}{n}} dx$.