gaelle.buffet@ac-montpellier.fr - http://gaellebuffet.free.fr/

# TS - correction du contrôle n°7

## Sujet A

**Exercice 1.**

**1.** (2 points)

$2\ln(x) \geq \ln 2 + \ln(12 - x)$

L'inéquation est définie pour $x > 0$ et $12 - x > 0 \Leftrightarrow x < 12$, elle est donc définie sur $]0; 12[$

$2\ln(x) \geq \ln 2 + \ln(12 - x) \Rightarrow \ln(x^2) \geq \ln[2(12 - x)]$

$$\Leftrightarrow x^2 \geq 2(12 - x) \Leftrightarrow x^2 \geq 24 - 12x \Leftrightarrow x^2 + 2x - 24 \geq 0$$

$$\Delta = 4 - 4 \times (-24) = 100 > 0$$

$$x_1 = \frac{-2 - 10}{2} = -6 \text{ et } x_2 = \frac{-2 + 10}{2} = 4$$

| $x$ | $-\infty$ | | $-6$ | | $4$ | | $+\infty$ |
|---|---|---|---|---|---|---|---|
| Signe de $x^2 + 2x - 24$ | | $+$ | $0$ | $-$ | $0$ | $+$ | |

car $a = 1 > 0$

L'ensemble des solutions est donc

$$S = ]0; 12[ \cap (]-\infty; -6] \cup [4; +\infty[) = [4; 12[$$

**2.**

(1 point)

$$\mathrm{I} = \int_1^2 (x^2 + 4x - 1)\,dx = \left[\frac{x^3}{3} + 2x^2 - x\right]_1^2 = \frac{8}{3} + 8 - 2 - \left(\frac{1}{3} + 2 - 1\right)$$

$$= \frac{7}{3} + 5 = \frac{22}{3}$$

(1,5 points)

$$\mathrm{J} = \int_0^3 \frac{x}{2x^2 + 3}\,dx = \frac{1}{4}\int_0^3 \frac{4x}{2x^2 + 3}\,dx = \frac{1}{4}[\ln(2x^2 + 3)]_0^3$$

$$\mathrm{J} = \frac{1}{4}[\ln(21) - \ln(3)] = \frac{1}{4}\ln\left(\frac{21}{3}\right) = \frac{1}{4}\ln(7)$$

(1,5 points)

$$\mathrm{K} = \int_{-1}^0 \frac{1}{\sqrt{3x + 4}}\,dx = \frac{2}{3}\int_{-1}^0 \frac{3}{2\sqrt{3x + 4}}\,dx = \frac{2}{3}\left[\sqrt{3x + 4}\right]_{-1}^0$$

$$= \frac{2}{3}(\sqrt{4} - \sqrt{1}) = \frac{2}{3}(2 - 1) = \frac{2}{3}$$

(1,5 points)

$$\mathrm{L} = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \underbrace{\sin(x)}_{u}\,\underbrace{\cos(x)}_{u'}\,dx = \left[\underbrace{\frac{\sin^2(x)}{2}}_{\frac{u^2}{2}}\right]_0^{\frac{\pi}{2}} = \frac{\sin^2\left(\frac{\pi}{2}\right)}{2} - \frac{\sin^2(0)}{2} = \frac{1}{2}$$

(1,5 points)

$$\mathrm{M} = \int_1^2 \left(e^{-\frac{x}{2}} + \frac{2}{x^2}\right)dx = \left[\frac{e^{-\frac{x}{2}}}{-\frac{1}{2}} - \frac{2}{x}\right]_1^2 = \left[-2e^{-\frac{x}{2}} - \frac{2}{x}\right]_1^2$$

$$\mathrm{M} = -2e^{-1} - 1 - \left(-2e^{-\frac{1}{2}} - \frac{2}{1}\right) = -2e^{-1} - 1 + 2e^{-\frac{1}{2}} + 2$$

$$= -2e^{-1} + 2e^{-\frac{1}{2}} + 1$$

<table>
<tr>
<td rowspan="5">**Exercice 2.**</td>
<td>**A1**</td>
<td>

$$\left.\begin{array}{l}\lim\limits_{x\to-\frac{1}{2}^+}(2x+1)=0\\ \lim\limits_{x\to-\frac{1}{2}^+}\ln(2x+1)=-\infty\end{array}\right\}\text{Forme indéterminée par produit}$$

En posant $X=2x+1$,

$$\lim_{x\to-\frac{1}{2}^+}(2x+1)\ln(2x+1)=\lim_{X\to0^+}X\ln(X)=0$$

$$\left.\begin{array}{l}\lim\limits_{x\to+\infty}(2x+1)=+\infty\\ \lim\limits_{x\to+\infty}\ln(2x+1)=+\infty\end{array}\right\}\text{par produit } \lim_{x\to+\infty}(2x+1)\ln(2x+1)=+\infty$$

</td>
<td>2</td>
</tr>
<tr>
<td rowspan="3">**A2**</td>
<td>

$\forall x\in\left]-\frac{1}{2};+\infty\right[,\ f(x)=\underbrace{(2x+1)}_{u}\underbrace{\ln(2x+1)}_{v}$

$u=2x+1 \qquad u'=2$

$v=\underbrace{\ln(2x+1)}_{\ln u} \qquad v'=\underbrace{\frac{2}{2x+1}}_{\frac{u'}{u}}$

$f'(x)=\underbrace{2\ln(2x+1)}_{u'\times v}+\underbrace{(2x+1)\frac{2}{2x+1}}_{u\times v'}=2\ln(2x+1)+2$

$f'(x)=2[\ln(2x+1)+1]$

$2>0$ donc $f'(x)$ est du même signe que $[\ln(2x+1)+1]$

</td>
<td>1,5</td>
</tr>
<tr>
<td>

$$\begin{aligned}\ln(2x+1)+1\geq0 &\Leftrightarrow \ln(2x+1)\geq-1\\ &\Leftrightarrow 2x+1\geq e^{-1}\\ &\Leftrightarrow 2x\geq e^{-1}-1\\ &\Leftrightarrow x\geq\frac{1/e-1}{2}=\frac{1-e}{2e}\end{aligned}$$

| $x$ | $-\frac{1}{2}$ | | $\frac{1-e}{2e}$ | | $+\infty$ |
|---|---|---|---|---|---|
| $f'(x)$ | | $-$ | $0$ | $+$ | |
| $f(x)$ | $0$ | $\searrow$ | | $\nearrow$ | $+\infty$ |

</td>
<td>1,5</td>
</tr>
<tr>
<td>

La fonction $f$ admet donc pour minimum $f\left(\frac{1-e}{2e}\right)$ :

$$\begin{aligned}f\left(\frac{1-e}{2e}\right)&=\left(2\times\frac{1-e}{2e}+1\right)\ln\left(2\times\frac{1-e}{2e}+1\right)\\ &=\left(\frac{1-e}{e}+\frac{e}{e}\right)\ln\left(\frac{1-e}{e}+\frac{e}{e}\right)\\ &=\frac{1}{e}\ln\left(\frac{1}{e}\right)=\frac{1}{e}\ln(e^{-1})=\frac{1}{e}\times(-1)=-\frac{1}{e}\end{aligned}$$

</td>
<td>1</td>
</tr>
<tr>
<td>**B1**</td>
<td>

$\forall x\in\left]-\frac{1}{2};+\infty\right[,\quad F(x)=\frac{(2x+1)^2}{4}\ln(2x+1)-\frac{(2x+1)^2}{8}$

</td>
<td></td>
</tr>
</table>

| | | | |
|---|---|---|---|
| | **B1** | $$F'(x) = \frac{2(2x+1)\times 2}{4}\ln(2x+1) + \frac{(2x+1)^2}{4}\times\frac{2}{2x+1} - \frac{2(2x+1)\times 2}{8}$$ $$F'(x) = (2x+1)\ln(2x+1) + \frac{(2x+1)}{2} - \frac{(2x+1)}{2} = (2x+1)\ln(2x+1) = f(x)$$ Donc la fonction $F$ est une primitive de la fonction $f$ | **2,5** |
| | **B2** | $$\int_0^4 f(t)dt = [\,F(x)]_0^4 = F(4) - F(0) = \frac{9^2}{4}\ln(9) - \frac{9^2}{8} - \left(\frac{1}{4}\ln(1) - \frac{1}{8}\right)$$ $$= \frac{81}{4}\ln(3^2) - \frac{81}{8} + \frac{1}{8} = \frac{81}{4}\times 2\ln(3) - \frac{80}{8} = \frac{81}{2}\ln(3) - 10$$ | **1,5** |
| Exercice 3. | | $$\forall n\in\mathbb{N}, \int_0^1 e^{-\frac{x}{n}}dx = \left[\frac{e^{-\frac{x}{n}}}{-\frac{1}{n}}\right]_0^1 = \left[-n\,e^{-\frac{x}{n}}\right]_0^1 = -n\,e^{-\frac{1}{n}} + n\,e^0$$ $$\int_0^1 e^{-\frac{x}{n}}dx = n - n\,e^{-\frac{1}{n}}$$ $$\left.\begin{array}{l}\lim\limits_{n\to+\infty} n = +\infty \\ \lim\limits_{n\to+\infty} n\,e^{-\frac{1}{n}} = +\infty\end{array}\right\}$$ Forme indéterminée par différence $$\int_0^1 e^{-\frac{x}{n}}dx = n\left(1 - e^{-\frac{1}{n}}\right) = \frac{e^{-\frac{1}{n}} - 1}{-\frac{1}{n}}$$ En posant $X = -\frac{1}{n}$, $$\lim_{n\to+\infty}\frac{e^{-\frac{1}{n}} - 1}{-\frac{1}{n}} = \lim_{X\to 0}\frac{e^X - 1}{X} = 1$$ donc $\lim\limits_{n\to+\infty}\int_0^1 e^{-\frac{x}{n}}dx = 1$ | **1** |

## Sujet B

**Exercice 1.**

**1.** (2 points)

$2\ln(x) \geq \ln 2 + \ln(24 - x)$

L'inéquation est définie pour $x > 0$ et $24 - x > 0 \Leftrightarrow x < 24$, elle est donc définie sur $]0; 24[$

$2\ln(x) \geq \ln 2 + \ln(24 - x) \Rightarrow \ln(x^2) \geq \ln[2(24 - x)]$

$$\Leftrightarrow x^2 \geq 2(24 - x) \Leftrightarrow x^2 \geq 48 - 12x \Leftrightarrow x^2 + 2x - 48 \geq 0$$

$$\Delta = 4 - 4 \times (-48) = 196 > 0$$

$$x_1 = \frac{-2-14}{2} = -8 \text{ et } x_2 = \frac{-2+14}{2} = 6$$

| $x$ | $-\infty$ | | $-8$ | | $6$ | | $+\infty$ |
|---|---|---|---|---|---|---|---|
| Signe de $x^2 + 2x - 48$ | | $+$ | $0$ | $-$ | $0$ | $+$ | |

car $a = 1 > 0$

L'ensemble des solutions est donc

$$S = ]0; 24[ \cap (]-\infty; -8] \cup [6; +\infty[) = [6; 24[$$

**2.**

(1 point)

$$\mathrm{I} = \int_1^2 (x^2 - 6x + 1)\,dx = \left[\frac{x^3}{3} - 3x^2 + x\right]_1^2 = \frac{8}{3} - 12 + 2 - \left(\frac{1}{3} - 3 + 1\right)$$
$$= \frac{7}{3} - 8 = \frac{-17}{3}$$

(1,5 points)

$$\mathrm{J} = \int_0^2 \frac{x}{3x^2+2}\,dx = \frac{1}{6}\int_0^2 \frac{6x}{3x^2+2}\,dx = \frac{1}{6}[\ln(3x^2+2)]_0^2$$
$$\mathrm{J} = \frac{1}{6}[\ln(14) - \ln(2)] = \frac{1}{6}\ln\left(\frac{14}{2}\right) = \frac{1}{6}\ln(7)$$

(1,5 points)

$$\mathrm{K} = \int_{-2}^0 \frac{1}{\sqrt{4x+9}}\,dx = \frac{2}{4}\int_{-2}^0 \frac{4}{2\sqrt{4x+9}}\,dx = \frac{1}{2}\left[\sqrt{4x+9}\right]_{-2}^0$$
$$\mathrm{K} = \frac{1}{2}\left(\sqrt{9} - \sqrt{1}\right) = \frac{1}{2}(3-1) = 1$$

(1,5 points)

$$\mathrm{L} = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \underbrace{\sin(x)}_{u}\,\underbrace{\cos(x)}_{u'}\,dx = \left[\underbrace{\frac{\sin^2(x)}{2}}_{\frac{u^2}{2}}\right]_0^{\frac{\pi}{2}} = \frac{\sin^2\left(\frac{\pi}{2}\right)}{2} - \frac{\sin^2(0)}{2} = \frac{1}{2}$$

(1,5 points)

$$\mathrm{M} = \int_1^2 \left(e^{-\frac{x}{3}} + \frac{3}{x^2}\right)dx = \left[\frac{e^{-\frac{x}{3}}}{-\frac{1}{3}} - \frac{3}{x}\right]_1^2 = \left[-3e^{-\frac{x}{3}} - \frac{3}{x}\right]_1^2$$
$$\mathrm{M} = -3e^{-\frac{2}{3}} - \frac{3}{2} - \left(-3e^{-\frac{1}{3}} - \frac{3}{1}\right) = -3e^{-\frac{2}{3}} + 3e^{-\frac{1}{3}} + \frac{3}{2}$$

**Exercice 2.**

**A1** (2)

$$\left.\begin{array}{l}\lim\limits_{x\to-\frac{1}{3}^+}(3x+1)=0\\ \lim\limits_{x\to-\frac{1}{3}^+}\ln(3x+1)=-\infty\end{array}\right\}\text{Forme indéterminée par produit}$$

En posant $X=3x+1$,

$$\lim_{x\to-\frac{1}{3}^+}(3x+1)\ln(3x+1)=\lim_{X\to0^+}X\ln(X)=0$$

$$\left.\begin{array}{l}\lim\limits_{x\to+\infty}(3x+1)=+\infty\\ \lim\limits_{x\to+\infty}\ln(3x+1)=+\infty\end{array}\right\}\text{par produit } \lim_{x\to+\infty}(3x+1)\ln(3x+1)=+\infty$$

**A2** (1,5)

$\forall x\in\left]-\frac{1}{3};+\infty\right[$, $f(x)=\underbrace{(3x+1)}_{u}\underbrace{\ln(3x+1)}_{v}$

$u=3x+1 \qquad u'=3$

$v=\underbrace{\ln(3x+1)}_{\ln u} \qquad v'=\underbrace{\dfrac{3}{3x+1}}_{\frac{u'}{u}}$

$$f'(x)=\underbrace{3\ln(3x+1)}_{u'\times v}+\underbrace{(3x+1)\frac{3}{3x+1}}_{u\times v'}=3\ln(3x+1)+3$$

$f'(x)=3[\ln(3x+1)+1]$

$3>0$ donc $f'(x)$ est du même signe que $[\ln(3x+1)+1]$

(1,5)

$$\begin{aligned}\ln(3x+1)+1\geq0&\Leftrightarrow\ln(3x+1)\geq-1\\&\Leftrightarrow 3x+1\geq e^{-1}\\&\Leftrightarrow 3x\geq e^{-1}-1\\&\Leftrightarrow x\geq\frac{1/e-1}{3}=\frac{1-e}{3e}\end{aligned}$$

| $x$ | $-\frac{1}{3}$ | | $\frac{1-e}{3e}$ | | $+\infty$ |
|---|---|---|---|---|---|
| $f'(x)$ | | $-$ | $0$ | $+$ | |
| $f(x)$ | $0$ | $\searrow$ | | $\nearrow$ | $+\infty$ |

(1)

La fonction $f$ admet donc pour minimum $f\left(\frac{1-e}{3e}\right)$ :

$$\begin{aligned}f\left(\frac{1-e}{3e}\right)&=\left(3\times\frac{1-e}{3e}+1\right)\ln\left(3\times\frac{1-e}{3e}+1\right)\\&=\left(\frac{1-e}{e}+\frac{e}{e}\right)\ln\left(\frac{1-e}{e}+\frac{e}{e}\right)\\&=\frac{1}{e}\ln\left(\frac{1}{e}\right)=\frac{1}{e}\ln(e^{-1})=\frac{1}{e}\times(-1)=-\frac{1}{e}\end{aligned}$$

**B1**

$\forall x\in\left]-\frac{1}{3};+\infty\right[$, $F(x)=\dfrac{(3x+1)^2}{6}\ln(3x+1)-\dfrac{(3x+1)^2}{12}$

<table>
<tr><td rowspan="2"></td><td>B1</td><td>$$F'(x)=\frac{2(3x+1)\times 3}{6}\ln(3x+1)+\frac{(3x+1)^2}{6}\times\frac{3}{3x+1}-\frac{2(3x+1)\times 3}{12}$$ $$F'(x)=(3x+1)\ln(3x+1)+\frac{(3x+1)}{2}-\frac{(3x+1)}{2}$$ $$=(3x+1)\ln(3x+1)=f(x)$$ Donc la fonction $F$ est une primitive de la fonction $f$</td><td>2,5</td></tr>
<tr><td>B2</td><td>$$\int_0^1 f(t)dt=[\,F(x)]_0^1=F(1)-F(0)=\frac{4^2}{6}\ln(4)-\frac{4^2}{12}-\left(\frac{1}{6}\ln(1)-\frac{1}{12}\right)$$ $$=\frac{16}{6}\ln(2^2)-\frac{16}{12}+\frac{1}{12}=\frac{16}{6}\times 2\ln(2)-\frac{15}{12}=\frac{16}{3}\ln(2)-\frac{5}{4}$$</td><td>1,5</td></tr>
<tr><td>Exercice 3.</td><td></td><td>$$\forall n\in\mathbb{N},\int_0^1 e^{-\frac{x}{n}}dx=\left[\frac{e^{-\frac{x}{n}}}{-\frac{1}{n}}\right]_0^1=\left[-n\,e^{-\frac{x}{n}}\right]_0^1=-n\,e^{-\frac{1}{n}}+n\,e^0$$ $$\int_0^1 e^{-\frac{x}{n}}dx=n-n\,e^{-\frac{1}{n}}$$ $$\left.\begin{array}{l}\lim\limits_{n\to+\infty} n=+\infty\\ \lim\limits_{n\to+\infty} n\,e^{-\frac{1}{n}}=+\infty\end{array}\right\}\text{Forme indéterminée par différence}$$ $$\int_0^1 e^{-\frac{x}{n}}dx=n\left(1-e^{-\frac{1}{n}}\right)=\frac{e^{-\frac{1}{n}}-1}{-\frac{1}{n}}$$ En posant $X=-\frac{1}{n}$, $$\lim_{n\to+\infty}\frac{e^{-\frac{1}{n}}-1}{-\frac{1}{n}}=\lim_{X\to 0}\frac{e^X-1}{X}=1$$ donc $\lim\limits_{n\to+\infty}\int_0^1 e^{-\frac{x}{n}}dx=1$</td><td>1</td></tr>
</table>