EXERCICE 1. (6 points)

Dans cet exercice, tous les résultats demandés seront arrondis à 10^{-3} *près.* Une grande enseigne de cosmétiques lance une nouvelle crème hydratante.

Partie A : Conditionnement des pots

Cette enseigne souhaite vendre la nouvelle crème sous un conditionnement de 50 mL et dispose pour ceci de pots de contenance maximale 55 mL. On dit qu'un pot de crème est non conforme s'il contient moins de 49 mL de crème.

▶ 1. Plusieurs séries de tests conduisent à modéliser la quantité de crème, exprimée en mL, contenue dans chaque pot par une variable aléatoire X qui suit la loi normale d'espérance $\mu = 50$ et d'écart-type $\sigma = 1{,}2$. Calculer la probabilité qu'un pot de crème soit non conforme.

▶ 2. La proportion de pots de crème non conformes est jugée trop importante. En modifiant la viscosité de la crème, on peut changer la valeur de l'écart-type de la variable aléatoire X, sans modifier son espérance $\mu = 50$. On veut réduire à 0,06 la probabilité qu'un pot choisi au hasard soit non conforme.

On note σ' le nouvel écart-type, et Z la variable aléatoire égale à $\frac{X-50}{\sigma'}$.

a) Préciser la loi que suit la variable aléatoire Z.

b) Déterminer une valeur approchée du réel u tel que $P(Z \leq u) = 0{,}06$.

c) En déduire la valeur attendue de σ'.

▶ 3. Une boutique commande à son fournisseur 50 pots de cette nouvelle crème. On considère que le travail sur la viscosité de la crème a permis d'atteindre l'objectif fixé et donc que la proportion de pots non conformes dans l'échantillon est 0,06. Soit Y la variable aléatoire égale au nombre de pots non conformes parmi les 50 pots reçus.

a) On admet que Y suit une loi binomiale. En donner les paramètres.

b) Calculer la probabilité que la boutique reçoive deux pots non conformes ou moins de deux pots non conformes.

Partie B : Campagne publicitaire

Une association de consommateurs décide d'estimer la proportion de personnes satisfaites par l'utilisation de cette crème. Elle réalise un sondage parmi les personnes utilisant ce produit. Sur 140 personnes interrogées, 99 se déclarent satisfaites. Estimer, par intervalle de confiance au seuil de 95%, la proportion de personnes satisfaites parmi les utilisateurs de la crème.

EXERCICE 2. (8 points)

Pour chacune des questions, quatre propositions de réponse sont données dont une seule est exacte. Pour chacune des questions indiquer, sans justification, la bonne réponse sur la copie.

L'espace est rapporté à un repère orthonormal. t et t' désignent des paramètres réels.

Le plan (P) a pour équation $x - 2y + 3z + 5 = 0$.

Le plan (S) a pour représentation paramétrique $\begin{cases} x = -2 + t + 2t' \\ y = -t - 2t' \\ z = -1 - t + 3t' \end{cases}$.

La droite (D) a pour représentation paramétrique $\begin{cases} x = -2 + t \\ y = -t \\ z = -1 - t \end{cases}$.

On donne les points de l'espace $M(-1; 2; 3)$ et $N(1; -2; 9)$.

▶1. Une représentation paramétrique du plan (P) est :

$a.\begin{cases} x = t \\ y = 1 - 2t \\ z = -1 + 3t \end{cases}$ $b.\begin{cases} x = t + 2t' \\ y = 1 - t + t' \\ z = -1 - t \end{cases}$ $c.\begin{cases} x = t + t' \\ y = 1 - t - 2t' \\ z = 1 - t - 3t' \end{cases}$ $d.\begin{cases} x = 1 + 2t + t' \\ y = 1 - 2t + 2t' \\ z = -1 - t' \end{cases}$

▶2. a. La droite (D) et le plan (P) sont sécants au point $A(-8; 3; 2)$.
b. La droite (D) et le plan (P) sont perpendiculaires.
c. La droite (D) est une droite du plan (P).
d. La droite (D) et le plan (P) sont strictement parallèles.

▶3. a. La droite (MN) et la droite (D) sont orthogonales.
b. La droite (MN) et la droite (D) sont parallèles.
c. La droite (MN) et la droite (D) sont sécantes.
d. La droite (MN) et la droite (D) sont confondues.

▶4. a. Les plans (P) et (S) sont parallèles.
b. La droite (Δ) de représentation paramétrique $\begin{cases} x = t \\ y = -2 - t \\ z = -3 - t \end{cases}$ est la droite d'intersection des plans (P) et (S).
c. Le point M appartient à l'intersection des plans (P) et (S).
d. Les plans (P) et (S) sont perpendiculaires.

EXERCICE 3. (6 points)

Dans cet exercice, sauf indication contraire, les résultats seront arrondis au centième.

▶1. La durée de vie, exprimée en années, d'un moteur pour automatiser un portail fabriqué par une entreprise A est une variable aléatoire X qui suit une loi exponentielle de paramètre λ, où λ est un réel strictement positif.
On sait que $P(X \leq 2) = 0{,}15$. Déterminer la valeur exacte du réel λ.
Dans la suite de l'exercice on prendra 0,081 pour valeur de λ.

▶2. a. Déterminer $P(X \geq 3)$.
b. Montrer que pour tous réels positifs t et h, $P_{X \geq t}(X \geq t + h) = P(X \geq h)$.
c. Le moteur a déjà fonctionné durant 3 ans. Quelle est la probabilité pour qu'il fonctionne encore 2 ans ?
d. Calculer l'espérance de la variable aléatoire X et donner une interprétation de ce résultat.

▶3. **Dans la suite de cet exercice, on donnera des valeurs arrondies des résultats à 10^{-3}**
L'entreprise A annonce que le pourcentage de moteurs défectueux dans la production est égal à 1%. Afin de vérifier cette affirmation 800 moteurs sont prélevés au hasard. On constate que 15 moteurs sont détectés défectueux.
Le résultat de ce test remet-il en question l'annonce de l'entreprise A ? Justifier. On pourra s'aider d'un intervalle de fluctuation.