| | | | |
|---|---|---|---|
| Exercice 1. | **A1.** | $P(X \leq 49) \approx 0{,}202$ | **0,5** |
| | **A2.** | La variable Z suit une loi normale centre réduite car $Z = \frac{X-50}{\sigma'}$. | **0,5** |
| | | $P(Z \leq u) = 0{,}06$ lorsque $u \approx -1{,}555$ | **1** |
| | | $P(X \leq 49) = 0{,}06 = P(X - 50 \leq -1) = P\left(\frac{X-50}{\sigma'} \leq -\frac{1}{\sigma'}\right)$<br>$P\left(Z \leq -\frac{1}{\sigma'}\right) = 0{,}06$ donc $-\frac{1}{\sigma'} \approx -1{,}555 \Leftrightarrow \sigma' \approx \frac{-1}{-1{,}555} \approx 0{,}643$ | **1** |
| | **A3.** | On répète 50 fois, de façon identique et indépendante, l'alternative : Pot conforme ou pot non conforme où la probabilité d'avoir un pot non conforme est 0,06. Donc le nombre de pots non conforme suit une loi binomiale $\mathcal{B}(n = 50; p = 0{,}06)$. | **1** |
| | | $P(Y \leq 2) = P(Y = 0) + P(Y = 1) + P(Y = 2)$<br>$P(Y \leq 2) = 0{,}94^{50} + \binom{50}{1} \times 0{,}06 \times 0{,}94^{49} + \binom{50}{2} \times 0{,}06^2 \times 0{,}94^{48}$<br>$P(Y \leq 2) = 0{,}94^{50} + 50 \times 0{,}06 \times 0{,}94^{49} + 1225 \times 0{,}06^2 \times 0{,}94^{48}$<br>$P(Y \leq 2) = 0{,}94^{50} + 3 \times 0{,}94^{49} + 4{,}41 \times 0{,}94^{48} \approx 0{,}416$ | **1** |
| | **B.** | L'intervalle de confiance au seuil de 95% de la proportion de personnes satisfaites parmi les utilisateurs de la crème est $I = \left[f - \frac{1}{\sqrt{n}}; f - \frac{1}{\sqrt{n}}\right]$<br>$I = \left[\frac{99}{140} - \frac{1}{\sqrt{140}}; \frac{99}{140} - \frac{1}{\sqrt{140}}\right] \approx [0{,}622; 0{,}792]$ | **1** |
| Exercice 2. | **1.** | Parmi les réponses proposées, la premières a. n'est pas une équation de plan !<br>Le plan $(P)$ a pour équation $x - 2y + 3z + 5 = 0$ donc le vecteur $\vec{n}\begin{pmatrix}1\\-2\\3\end{pmatrix}$ est normal au plan $(P)$. Il est donc orthogonal aux vecteurs directeurs du plan :<br>En b. $\vec{u}\begin{pmatrix}1\\-1\\-1\end{pmatrix}$ et $\vec{v}\begin{pmatrix}2\\1\\0\end{pmatrix}$ or $\vec{n}.\vec{u} = \begin{pmatrix}1\\-2\\3\end{pmatrix}.\begin{pmatrix}1\\-1\\-1\end{pmatrix} = 1 + 2 - 3 = 0$ et<br>$\vec{n}.\vec{v} = \begin{pmatrix}1\\-2\\3\end{pmatrix}.\begin{pmatrix}2\\1\\0\end{pmatrix} = 2 - 2 + 0 = 0$<br>En c. $\vec{u}\begin{pmatrix}1\\-1\\-1\end{pmatrix}$ et $\vec{v}\begin{pmatrix}1\\-2\\-3\end{pmatrix}$ or $\vec{n}.\vec{u} = \begin{pmatrix}1\\-2\\3\end{pmatrix}.\begin{pmatrix}1\\-1\\-1\end{pmatrix} = 0$ et | **2** |

| | | | |
|---|---|---|---|
| | | $\vec{n}.\vec{v} = \begin{pmatrix}1\\-2\\3\end{pmatrix}.\begin{pmatrix}1\\-2\\-3\end{pmatrix} = 1+4-9 \neq 0$ donc ce n'est pas la réponse c.<br>En d. $\vec{u}\begin{pmatrix}2\\-2\\0\end{pmatrix}$ et $\vec{v}\begin{pmatrix}1\\2\\-1\end{pmatrix}$ or $\vec{n}.\vec{u} = \begin{pmatrix}1\\-2\\3\end{pmatrix}.\begin{pmatrix}2\\-2\\0\end{pmatrix} = 2+4+0 \neq 0$ donc ce n'est pas la réponse d.<br>Par élimination, la réponse est donc b. | |
| | **2.** | La droite $(D)$ a pour vecteur directeur $\vec{u}\begin{pmatrix}1\\-1\\-1\end{pmatrix}$ et donc<br>$\vec{n}.\vec{u} = \begin{pmatrix}1\\-2\\3\end{pmatrix}.\begin{pmatrix}1\\-1\\-1\end{pmatrix} = 1+2-3 = 0$ donc $\vec{n} \perp \vec{u}$. On en déduit que la droite $(D)$ est parallèle au plan $(P)$ de vecteur normal $\vec{n}$. On élimine alors les réponses a. et b.<br>Prenons un point quelconque de la droite $(D)$, pour $t = 0$, on obtient $\begin{cases} x = -2 \\ y = 0 \\ z = -1 \end{cases}$. Ce point appartient-il au plan $(P)$ ?<br>$x - 2y + 3z + 5 = -2 - 2\times 0 + 3\times(-1) + 5 = -2 - 3 + 5 = 0$<br>$(D)$ est parallèle au plan $(P)$ et l'un des points de la droite $(D)$ appartient au plan $(P)$ alors réponse c. La droite $(D)$ est une droite du plan $(P)$. | **2** |
| | **3.** | La droite $(MN)$ a pour vecteur directeur $\overrightarrow{MN}\begin{pmatrix}2\\-4\\6\end{pmatrix}$ et la droite $(D)$ a pour vecteur directeur $\vec{u}\begin{pmatrix}1\\-1\\-1\end{pmatrix}$.<br>$\overrightarrow{MN}$ et $\vec{u}$ ne sont pas colinéaires car $\frac{2}{1} \neq -\frac{4}{-1} \neq \frac{6}{-1}$.<br>On peut alors éliminer les réponses b. et d.<br>$\overrightarrow{MN}.\vec{u} = \begin{pmatrix}2\\-4\\6\end{pmatrix}.\begin{pmatrix}1\\-1\\-1\end{pmatrix} = 2+4-6 = 0$ donc $\overrightarrow{MN} \perp \vec{u}$<br>La réponse est donc a. | **2** |
| | **4.** | Le plan $(S)$ a pour vecteurs directeurs $\vec{p}\begin{pmatrix}1\\-1\\-1\end{pmatrix}$ et $\vec{q}\begin{pmatrix}2\\-2\\3\end{pmatrix}$.<br>$\vec{n}.\vec{p} = \begin{pmatrix}1\\-2\\3\end{pmatrix}.\begin{pmatrix}1\\-1\\-1\end{pmatrix} = 1+2-3 = 0$ et $\vec{n}.\vec{q} = \begin{pmatrix}1\\-2\\3\end{pmatrix}.\begin{pmatrix}2\\-2\\3\end{pmatrix} = 2+4+9 \neq 0$<br>$\vec{n}$, vecteur normal au plan $(P)$ n'est pas normal au plan $(S)$ donc les plans $(P)$ et $(S)$ ne sont pas parallèles. | **2** |

| | | | |
|---|---|---|---|
| | **4.** | $M(-1;2;3)$ n'appartient pas au plan $(P)$ car $$x-2y+3z+5=-1-2\times 2+3\times 3+5=9\neq 0$$ Donc on peut exclure la réponse c.<br>Si les plans $(P)$ et $(S)$ sont orthogonaux alors $\vec{n}\begin{pmatrix}1\\-2\\3\end{pmatrix}$, vecteur normal au plan $(P)$ est coplanaire avec $\vec{p}\begin{pmatrix}1\\-1\\-1\end{pmatrix}$ et $\vec{q}\begin{pmatrix}2\\-2\\3\end{pmatrix}$ vecteurs directeurs de $(S)$. $$x\vec{n}+y\vec{p}+z\vec{q}=\vec{0}$$ $$\begin{cases}x+y+2z=0 & L_1\\-2x-y-2z=0 & L_2\\3x-y+3z=0 & L_3\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}x+y+2z=0\\-x=0 & L_1+L_2\\5x+5z=0 & L_3-L_2\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}x=0\\z=0\\y=0\end{cases}$$ Les vecteurs $\vec{n}$, $\vec{p}$ et $\vec{q}$ ne sont pas coplanaires donc les plans $(P)$ et $(S)$ ne sont pas perpendiculaires.<br>Par élimination, réponse b.<br>Vérification :<br>$M(x;y;z)\in(P)$ donc $x-2y+3z+5=0$<br>et $M(x;y;z)\in(S)$ donc $\begin{cases}x=-2+t+2t'\\y=-t-2t'\\z=-1-t+3t'\end{cases}$ $$x-2y+3z+5=0$$ $$\Leftrightarrow -2+t+2t'-2(-t-2t')+3(-1-t+3t')+5=0$$ $$\Leftrightarrow -2+t+2t'+2t+4t'-3-3t+9t'+5=0$$ $$\Leftrightarrow 15t'=0$$ $$\Leftrightarrow t'=0$$ Une équation paramétrique de la droite d'intersection est $d\begin{cases}x=-2+t\\y=-t\\z=-1-t\end{cases}$<br>Cette droite a pour vecteur directeur $\vec{p}\begin{pmatrix}1\\-1\\-1\end{pmatrix}$ qui est aussi vecteur directeur de la droite $(\Delta)$ donc $(\Delta)//d$. De plus, le point $(-2;0;-1)$ appartient à la droite $d$, et $\begin{cases}x=t=-2\\y=-2-t=0\\z=-3-t=-1\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}t=-2\\-2=t\\-t=2\end{cases}$ donc ce point appartient à la droite $(\Delta)$ donc elles sont confondues. $(\Delta)$ est l'intersection des plans $(P)$ et $(S)$. | |

| | | | |
|---|---|---|---|
| Exercice 3. | **1.** | $$P(X \leq 2) = 0{,}15 = \int_0^2 \lambda e^{-\lambda t} dt = \left[-e^{-\lambda t}\right]_0^2 = -e^{-2\lambda} + e^0 = 1 - e^{-2\lambda}$$ $$1 - e^{-2\lambda} = 0{,}15$$ $$\Leftrightarrow -e^{-2\lambda} = -0{,}85$$ $$\Leftrightarrow e^{-2\lambda} = 0{,}85$$ $$\Leftrightarrow -2\lambda = \ln 0{,}85$$ $$\Leftrightarrow \lambda = \frac{\ln 0{,}85}{-2} \approx 0{,}0813$$ | **1** |
| | **2.** | $$P(X \geq 3) = \int_3^{+\infty} 0{,}081 e^{-0{,}081t} dt = 1 - \int_0^3 0{,}081 e^{-0{,}081t} dt$$ $$= 1 - [-e^{-0{,}081t}]_0^3 = 1 + e^{-0{,}243} - e^0 = e^{-0{,}243} \approx 0{,}784$$ | **1** |
| | | Pour tous réels positifs $x$ $$P(X \geq x) = 1 - \int_0^x \lambda e^{-\lambda t} dt = 1 - \left[-e^{-\lambda t}\right]_0^x = 1 + e^{-\lambda x} - 1 = e^{-\lambda x}$$ Pour tous réels positifs $t$ et $h$, $$P_{X \geq t}(X \geq t + h) = \frac{P(X \geq t \text{ et } X \geq t + h)}{P(X \geq t)} = \frac{P(X \geq t + h)}{P(X \geq t)} = \frac{e^{-\lambda(t+h)}}{e^{-\lambda t}}$$ $$= \frac{e^{-\lambda t} \times e^{-\lambda h}}{e^{-\lambda t}} = e^{-\lambda h} = P(X \geq h)$$ | **1** |
| | | $$P_{X \geq 3}(X \geq 5) = P(X \geq 2) = e^{-2\lambda} = e^{-2 \times 0{,}081} = e^{-0{,}162} \approx 0{,}85$$ | **1** |
| | | $$E(X) = \frac{1}{0{,}081} \approx 12{,}4$$ $E(X)$ représente la durée de vie moyenne que l'on peut espérer avoir pour un grand nombre de portails fabriqués par l'entreprise A. | **1** |
| | **3.** | L'intervalle de fluctuation asymptotique à 95% est $I_{800} = [0{,}003; 0{,}017]$ or $f = \frac{15}{800} = 0{,}01875 \notin I_{800}$. Ce résultat remet en question l'annonce de l'entreprise avec cependant un risqur d'erreur de 5%. | **1** |